no9 略解

0.

$$U=\sum_{i=1}^{N}\int_0^{Q_i}dq_i\left(\sum_{j=1}^{i-1}C_{ij}^{-1}Q_j+C_{ii}^{-1}q_i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}C_{ij}^{-1}Q_iQ_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}C_{ij}\phi_i\phi_j$$

1.

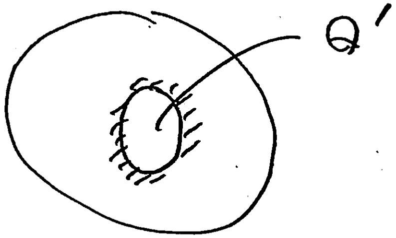
(1) 導体内では電場は0でなければならない。

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot E = 0 \rightarrow \int dV \rho = 0 \quad \cdots (\#)$$

これが導体内の<u>任意の</u>閉領域Vについて成り立つ。したがって電荷は表面にのみ分布

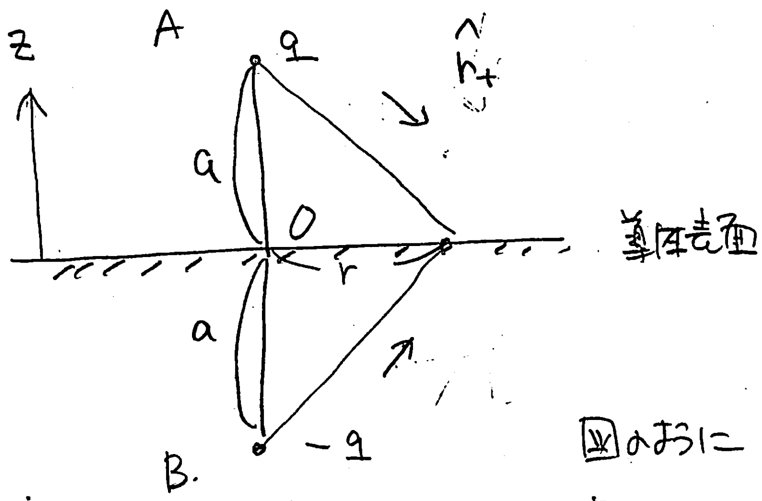
(2) 変化しない。内側の表面(空洞のまわりの壁)に電荷が存在することもない。
理由は(1)と同じ議論。

(3)



導体内に含まれ、かつ空洞を含む領域Vを考えると
(#)が成り立つためにはQ'を打ち消す$-Q'$の電荷が必要。一方、(1)と同様導体内部に電荷は存在できないのでこれは内側の表面に分布する。
一方、外側の表面には、合わせて、$Q+Q'$の電荷が分布する。

2.



導体表面 $(z=0)$ で

$$-\nabla\phi\Big|_z \propto \hat{z} \quad \cdots (A)$$

でなければならない。

図のように A, B に $q, -q$ の電荷を置いた場合を仮想的に考えると（導体は取り除いた真空）図のように原点 O をとって

$$\mathbb{E}(x,y,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2+a^2}(\hat{r}_+ - \hat{r}_-)$$

$$= -2\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\hat{z}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\hat{r}_\pm = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\, r\,\hat{r} \mp \frac{a\,\hat{z}}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$\hat{r} \to \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$$

となり、(A) をみたす。

誘導電荷は

$$\sigma(r) = \epsilon_0\left(\mathbb{E}(x,y,0)\cdot\hat{z}\right)$$

$$= -\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

総量をもとめると

$$\int_0^\infty dr\, 2\pi r\,\sigma(r) = -q\underbrace{\int_0^\infty dr\,\frac{ar}{(r^2+a^2)^{3/2}}}_{1} = -q$$