電磁気1演義 no8 略解

0.

(a) $\nabla\times A' = \nabla\times A + \underbrace{\nabla\times(\nabla\chi)}_{0}$　No1-4.

$$\nabla\phi' + \frac{\partial}{\partial t}A' = \nabla\left(\phi + \frac{\partial}{\partial t}\chi\right) - \frac{\partial}{\partial t}(A + \nabla\chi)$$

$$= \nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t}A \underbrace{- \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi}_{0}$$

よって不変

(b) Lorentzゲージ　$\nabla\cdot A + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$

$$\rho/\epsilon_0 = \nabla\cdot E = -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot A$$ Lorentzゲージ

$$= -\Delta\phi + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi$$

$$= \Box\phi$$

また

$$\mu_0 j = \nabla\times B - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} = \underbrace{\nabla\times(\nabla\times A)}_{-\Delta A + \nabla(\nabla\cdot A)} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}A\right)$$

$$= -\Box A + \nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot A + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)}_{0} = -\Box A$$

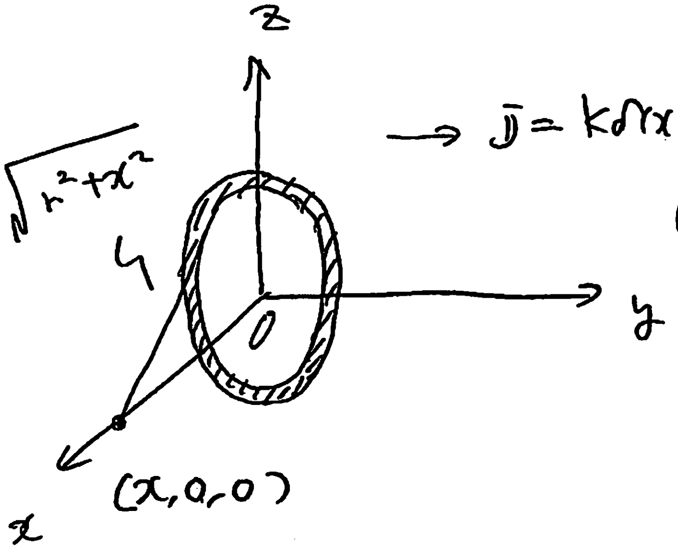
(c) $A' = A + \nabla\chi$, $\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$ より $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = S(\mathbf{r}, t)$

χのsource

$$S(\mathbf{r}, t) = \nabla\cdot A' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi'$$

((注) (A, ϕ) の方はLorentzゲージをみたしているとした))

1.



$$\longrightarrow \quad \mathbf{J} = k\,\delta(x)\,\theta(t)\,\hat{y}$$

(注) 階段関数

(a)
$$\mathbf{A}(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\infty} dr \quad 2\pi r\,\frac{\theta\left(t-\frac{\sqrt{r^2+x^2}}{c}\right)}{\sqrt{r^2+x^2}}\; k\,\hat{y}$$

$$= \hat{y}\,\frac{\mu_0 k}{2}\underbrace{\int_0^{\sqrt{(ct)^2-x^2}} dr\,\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}}_{\left.\sqrt{r^2+x^2}\right|_0^{\sqrt{(ct)^2-x^2}}}\;\theta\left(t-\frac{\sqrt{r^2+x^2}}{c}\right)$$

$$= \hat{y}\,\frac{\mu_0 k}{2}\left(ct-|x|\right)\theta\left((ct)^2-x^2\right)$$

(b) これから

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \hat{z}\,\frac{\partial A_y}{\partial x} = -\frac{\mu_0 k}{2}\,\theta\left((ct)^2-x^2\right)\,\mathrm{sgn}(x)\,\hat{z}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} = -c\,\frac{\mu_0 k}{2}\,\theta\left((ct)^2-x^2\right)\,\hat{y}.$$

ここで $\mathrm{sgn}(x)$は xの符号を返す関数.

* (注) 正確には, 階段関数の微分から
デルタ関数を含む項も出てくるが ここでは無視している。(伝播する光の先端部分)

(c) $u_{em}(x,t) = \frac{\epsilon_0}{2}|\mathbb{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbb{B}|^2$

$$\begin{cases} = \frac{\epsilon_0}{2} c^2 \left(-\frac{\mu_0 k}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(-\frac{\mu_0 k}{2}\right)^2 = \frac{\mu_0 k^2}{4} & |x| < ct \\ = 0 & |x| > ct \end{cases}$$

$$\mathbb{S} = \mathbb{E} \times \mathbb{H} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbb{E} \times \mathbb{B}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 k^2}{4} c \ \mathrm{sgn}(x)\ \hat{x} & |x| < ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

(d) 上の解に $\mathbb{J} = -k\,\delta(x)\,\theta(t - t_1)$ の解を重ね合わせれば良い