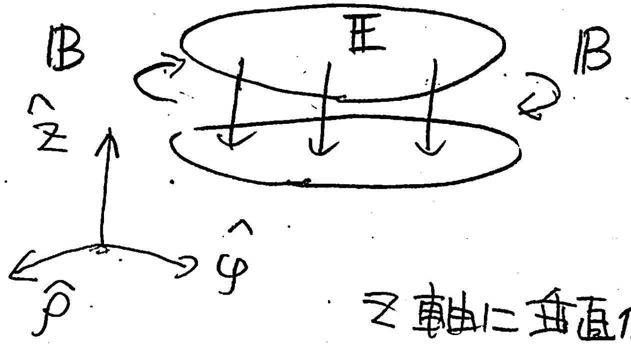
No 7略解

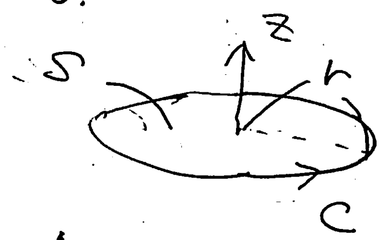
0.



(a) $\mathbb{E}(t) = -\frac{V(t)}{d}\hat{z} = -\frac{V_0}{d}\cos(\omega t)\hat{z}$

(b) $\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} = \mu_0\underbrace{\epsilon_0\frac{V_0}{d}\omega\sin(\omega t)}_{j(t)}\hat{z}$

z軸に垂直な半径rの円状の領域Sをコンデンサー中にとる.
(中心はz軸上にある). その円周をCとする



$$\int_S dS\,\hat{z}\cdot(\nabla\times\mathbb{B}) \underset{\text{ストークスの定理}}{=} \oint_C dl\,\hat{\varphi}\cdot\mathbb{B} = 2\pi r B(t)$$

$$\int_S dS\,\hat{z}\cdot\mu_0 j(t)\hat{z} = \mu_0 j(t)\pi r^2$$

$$\rightarrow B(t) = \frac{\mu_0}{2}r j(t) = \omega\frac{1}{2}\epsilon_0\mu_0\frac{r}{d}V_0\sin(\omega t)$$

(c) $\mathbb{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbb{E}\times\mathbb{B}) = \overbrace{\frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{V_0}{d}\right)^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,r}^{S(r)}\hat{\rho}$

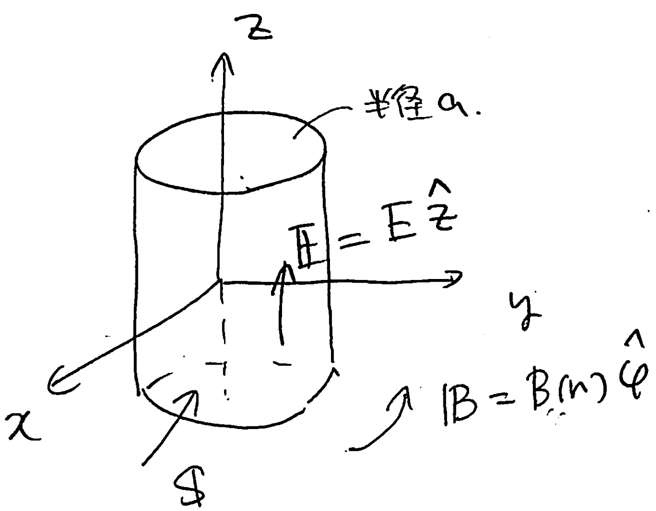
半径rの円筒状の領域をコンデンサーの中心にとって、そこでのエネルギー収支を考える

電場のエネルギー $U = \underbrace{\pi r^2 d}_{\text{体積}}\times\frac{\epsilon_0}{2}|\mathbb{E}(t)|^2 = \pi r^2 d\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{V_0}{d}\right)^2\cos^2(\omega t)$

$\frac{dU}{dt} = -\pi r^2 d\epsilon_0\left(\frac{V_0}{d}\right)^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ (磁場のエネルギーは $O(\omega^2)$ なので無視)

一方、円筒の外に出て行くエネルギーは $S(r)\times 2\pi r d$ で 比較すると収支は一致している.
単位時間あたり

1.



(a) 抵抗率をρとしているので

$$j = \frac{E}{\rho}$$

単位長さあたりで失われるエネルギーは

$$\boldsymbol{j}\cdot\mathbb{E}\,\pi a^2 = \pi a^2 \frac{E^2}{\rho}$$

(b)

z軸を中心に円筒座標系を取る.

軸対称性から $\mathbb{B}(\boldsymbol{r}) = B(r)\,\hat{\varphi}$

と仮定して良いだろう.

$$\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \qquad (\boldsymbol{j} = j\hat{z} : 導線の中で)$$

S: x-y面上の原点を中心とする半径 r の円

で両辺を面積分し、Stokesの定理を用いると

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{2\pi r}\pi r^2 j = \dfrac{\mu_0}{2} r \dfrac{E}{\rho} & (0<r<a) \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi r}\pi a^2 j = \dfrac{\mu_0}{2r} a^2 \dfrac{E}{\rho} & (r>a) \end{cases}$$

ポインティングベクトルは

$$\mathbb{S} = \mathbb{E}\times\mathbb{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbb{E}\times\mathbb{B} = \frac{r}{2}\frac{E^2}{\rho}\hat{z}\times\hat{\varphi}$$

$$= -\frac{r}{2}\frac{E^2}{\rho}\hat{r} \quad (0<r<a) \qquad (\hat{z}\times\hat{\varphi} = -\hat{r})$$

r>aでは 上のr=aでの値

(c) z方向に単位長さのリング状の部分 A を考え、ここで

$\mathbb{S}$を面積分すると

$$\int_A dS\,\hat{r}\cdot\mathbb{S} = 2\pi a\left(-\frac{a^2}{2a}\right)\frac{E^2}{\rho} = -\pi a^2\frac{E^2}{\rho}$$

つまり $\pi a^2 E^2/\rho$ のエネルギーが単位時間あたり流入していてこれが熱として失われている。

2.

$$\nabla\cdot\mathbb{E}=\rho/\epsilon_0 \quad \cdots ①$$

$$\nabla\times\mathbb{E}=-\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} \quad \cdots ②$$

$$\nabla\cdot\mathbb{B}=0 \quad \cdots ③$$

$$\nabla\times\mathbb{B}=\mu_0\mathbb{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} \quad \cdots ④$$

例えば ① より

$$0=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\left[\left(\nabla\cdot e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}-\omega t)}\right)\hat{\mathbb{E}}(\mathbb{k},\omega)-e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}-\omega t)}\frac{\hat{\rho}(\mathbb{k},t)}{\epsilon_0}\right]$$

$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{x}-\omega t)}\left[i\mathbb{k}\cdot\hat{\mathbb{E}}(\mathbb{k},\omega)-\frac{\hat{\rho}(\mathbb{k},t)}{\epsilon_0}\right]$$

これから

$$i\mathbb{k}\cdot\hat{\mathbb{E}}(\mathbb{k},\omega)=\hat{\rho}(\mathbb{k},\omega)/\epsilon_0 \quad \cdots ①'$$ を得る。

同様にして ② － ④ も考えると

$$i\mathbb{k}\cdot\hat{\mathbb{E}}(\mathbb{k},\omega)=\hat{\rho}(\mathbb{k},\omega)/\epsilon_0 \quad - ①'$$

$$i\mathbb{k}\times\hat{\mathbb{E}}(\mathbb{k},\omega)=i\omega\hat{\mathbb{B}}(\mathbb{k},\omega) \quad \cdots ②'$$

$$i\mathbb{k}\cdot\hat{\mathbb{B}}(\mathbb{k},\omega)=0 \quad \cdots ③'$$

$$i\mathbb{k}\times\hat{\mathbb{B}}(\mathbb{k},\omega)=\mu_0\mathbb{j}+\mu_0\epsilon_0\left(-i\omega\hat{\mathbb{E}}(\mathbb{k},\omega)\right) \quad \cdots ④'$$