電磁気学1演義 No 6 略解

0. $\nabla\cdot\mathbb{E}=0 \cdots ①$ $\qquad \nabla\times\mathbb{E}=-\partial\mathbb{B}/\partial t \cdots ②$

$\nabla\cdot\mathbb{B}=0 \cdots ③$ $\qquad \nabla\times\mathbb{B}=\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} \cdots ④$

②,④より

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbb{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbb{B} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2}$$

ここで $\quad$ 左辺 $=\nabla(\nabla\cdot\mathbb{E})-\nabla^2\mathbb{E}=-\nabla^2\mathbb{E}$ $\quad$ (①を用いた)

したがって

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{E}=0 \qquad c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

④,②より

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbb{B}) = \mu_0\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbb{E} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbb{B}}{\partial t^2}$$

ここで $\quad$ 左辺 $=\nabla(\nabla\cdot\mathbb{B})-\nabla^2\mathbb{B}=-\nabla^2\mathbb{B}$ $\quad$ (③を用いた)

したがって

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{B}=0 \qquad c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

1.

(a)

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = 0 \quad \cdots ① \qquad \nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \quad \cdots ②$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \quad \cdots ③ \qquad \nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} + \sigma \mathbb{E} \right) \quad \cdots ④$$

(b)

②の両辺の $\nabla \times \cdots$ をとって

$$\nabla \times \nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbb{B}$$

$$\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbb{E})}_{=0} - \nabla^2 \mathbb{E}$$

これに④を用いれば

$$\nabla^2 \mathbb{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

同様に④の両辺の $\nabla \times \cdots$ をとって

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) = \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \nabla \times \mathbb{E}$$

$$\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbb{B})}_{=0} - \nabla^2 \mathbb{B}$$

これに②を用いて

$$\nabla^2 \mathbb{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbb{B}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$

まとめると、$\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$ いずれの場合も次の形の方程式に従う。

$$\nabla^2 \psi - \mu_0 \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

(c) $e^{i(kx-\omega t)}$ の形を仮定すると 方程式に代入して

$$(ik)^2 + i\mu_0\sigma\omega - \mu\epsilon(i\omega)^2 = 0$$

すなわち $$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu_0\sigma\omega$$

ここで $k = \alpha + i\beta$ とおくと

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \mu\epsilon\omega^2 \\ 2\alpha\beta = \mu_0\sigma\omega \end{cases}$$

これをとくと

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\mu\epsilon}\right)^2}+1\right]^{1/2}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\mu\epsilon}\right)^2}-1\right]^{1/2}$$

したがって

$$e^{i(kx-\omega t)} = e^{i(\alpha x-\omega t)}\, e^{-\beta x}$$

で振幅は指数関数的に減衰する.

2.

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \cdots (\#)$$

(a)

$$\nabla \psi = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi = \left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right)\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$= \hat{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left\{(x, y, z)\ \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right\}$$

$$= 3\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \left(x\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + y\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$= 3\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r}\right)\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)$$

$$= 2\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

(b) 元の方程式 $(\#)$ は

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

つまり

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi)$$

これは1次元の波動方程式である。従って一般解として

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left(f(r-ct) + g(r+ct)\right)$$ の形が得られる。