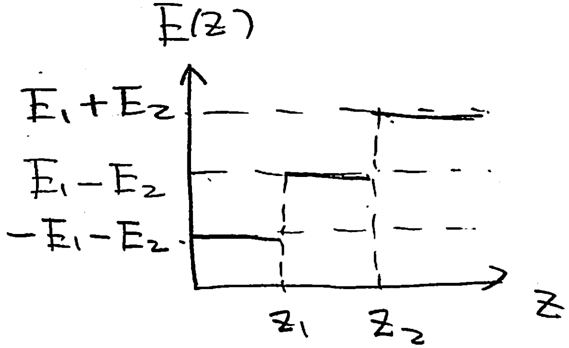
No4 略解

0. (a)



対称性から $\mathbf{E} = E(z)\hat{z}$ で No3−0の結果より

$$E_1 = \sigma_1/2\epsilon_0 \qquad E_2 = \sigma_2/2\epsilon_0$$

として $E(z)$は左図のようになる。

(b) 電場がz成分しかないのでMaxwell応力テンソルで0でないのは

$$T_{xx} = T_{yy} = -\frac{\epsilon_0}{2}E^2(z) \qquad T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2(z)$$

(c) 1が受ける力 $\mathbf{F}_1$は.

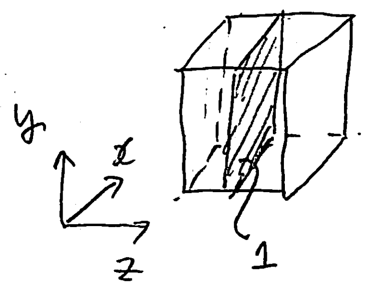
$$\mathbf{F}_1 = \underbrace{S\overset{\text{面積}}{}\sigma_1}_{1\text{の電荷}} E_2(-\hat{z}) \rightarrow \text{単位面積あたり}$$

$$\mathbf{F}_1/S = -\sigma_1 E_2 \hat{z} = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

同様に

$$\mathbf{F}_2/S = \sigma_2 E_1 \hat{z} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

(d) まず1に働く力を考える。



図の様に1を包みこむ領域を考え、その表面に働くMaxwell応力の総和を求めれば良い。x軸に垂直な2つの面に働く力はキャンセルする。y軸についても同様。z軸に垂直な2つの面に働く力はキャンセルしない。

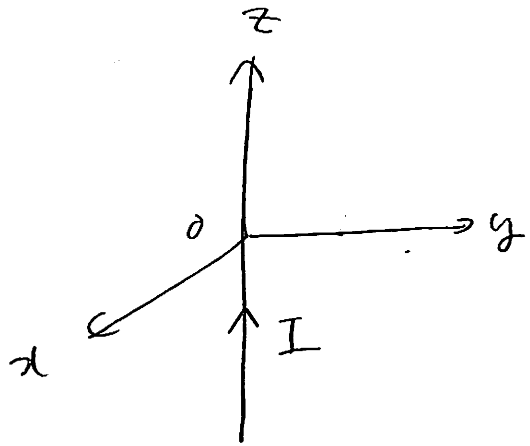
$$\mathbf{F}_1/S = \hat{z}\frac{\epsilon_0}{2}\left[-(-E_1-E_2)^2+(E_1-E_2)^2\right] = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

同様にして

$$\mathbf{F}_2/S = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

1.

(a)



$$\mathbb{j} = I\delta(x)\delta(y)$$

$$\nabla\cdot\mathbb{B} = 0 \quad \cdots ① \qquad \nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 I\delta(x)\delta(y) \quad \cdots ②$$

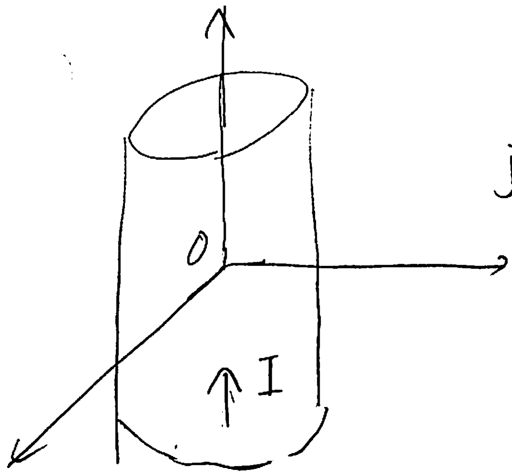
軸対称なので $\mathbb{B}(r) = B_r(r)\hat{r} + B_\varphi(r)\hat{\varphi}$ を仮定

① → 両辺をz軸を中心とする円柱内で体積積分, ガウスの定理を用いる → $B_r(r) = 0$ がわかる.

② → 両辺をz軸を中心とする円で面積分, ストークスの定理を用いる

$$\rightarrow B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(b)



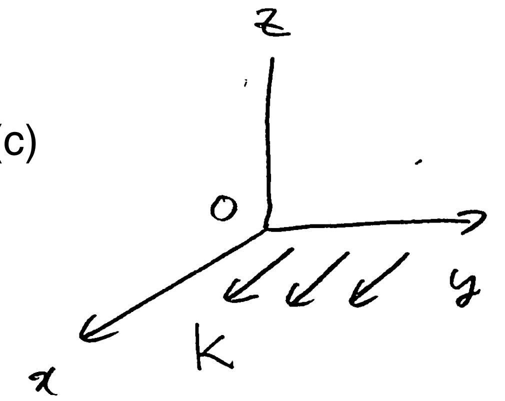
$$\mathbb{j}(r) = \begin{cases} \dfrac{I}{\pi a^2}\hat{z} & (0<r<a) \\ 0 & r>a \end{cases}$$

1. と同様に考えて

$B_r(r) = 0$

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 & (0<r<a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r>a) \end{cases}$$

(c)



電流の流れている面を $z=0$ とする。

（電流密度は $\mathbf{j} = K\delta(z)\hat{x}$ ）

$z=0$ 面に対する反転対称性と、x-y 面内での並進対称性より

$\mathbf{B}=\mathbf{B}(z)$ 　 $\mathbf{B}(z) = -\mathbf{B}(-z)$ ---(*) を仮定する。

∵ $\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \rightarrow \int_V dS\,\hat{n}\cdot\mathbf{B} = 0$ ---①

ガウスの定理

ここで V として $z=0$ をまたぐ任意の領域を考えると ①が成り立つためには

$\underline{B_z(z)=0}$ が必要とわかる。

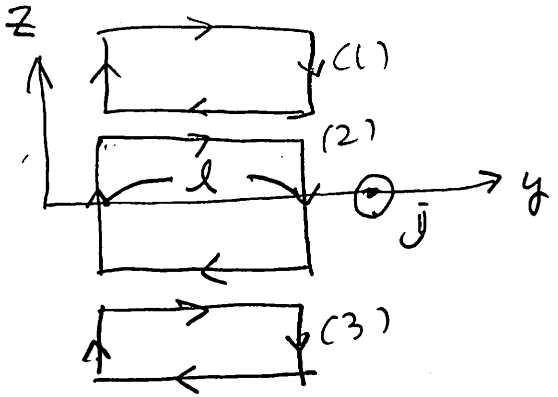
$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j} \rightarrow \oint_C dl\,\hat{t}\cdot\mathbf{B} = \mu_0\int_S dS\,\hat{n}\cdot\mathbf{j}$ ---②

ストークスの定理

経路C上の接線方向の単位ベクトル

ここで S として y 軸に垂直な「任意」の面を考えると、$\mathbf{j}$ は y 成分を持たないので ②の右辺は0

一方、右辺の線積分は、$\mathbf{B}$ の x 成分と z 成分のみ関係する。したがって $\underline{B_x(z)=0}$ も必要とわかる



最後に、x 軸に垂直な面上での② を考える。

(1)(3) のように $z=0$ 面をまたがっていなければ ②の右辺は0

(2) のように $z=0$ 面をまたがっていれば

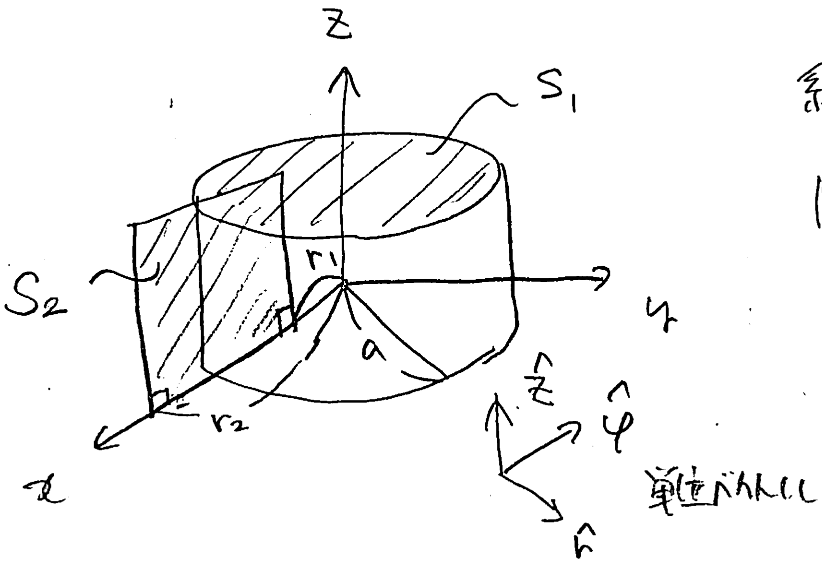
②の右辺 $= -\mu_0 K l$

（l は左図参照）

これから (*) の反転対称性も考慮して

$$B_y(z) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2} & (z>0) \\ +\dfrac{\mu_0 K}{2} & (z<0) \end{cases} \qquad B_x = B_z = 0$$

(d)



系が z 軸を中心として回転対称であるので

$\mathbb{B}(\mathbb{r}) = B_r(r)\hat{r} + B_\varphi(r)\hat{\varphi} + B_z(r)\hat{z}$ を仮定

$\nabla\cdot\mathbb{B} = 0 \xrightarrow[\text{ガウスの定理}]{} \int_V dS\,\hat{n}\cdot\mathbb{B} = 0 \cdots ①$

V として z 軸を中心とする円柱をとる（半径は任意）

これで成立するためには

$B_r = 0$ が必要

$\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{J} \rightarrow \oint_C dl\,\hat{t}\cdot\mathbb{B} = \mu_0\int_S dS\,\hat{n}\cdot\mathbb{J} \cdots ②$

ストークスの定理

- ここで S として図の S_1 のように z 軸に垂直な円板を考えると、C 上の接線ベクトル $\hat{t}$ は $\hat{\varphi}$ 方向になる。電流 J は z 成分を持たないので ② の右辺 = 0　したがって $B_\varphi = 0$ も必要
- 次に S として図の S_2 のように $\hat{\varphi}$ 方向に垂直な面を考える。これは、問題 3 のように電流の流れる面を含む場合／含まない場合で分けて考える。（詳細は略）

また無限遠で $\mathbb{B} = 0$ を要請すると

$$B_z(r) = \begin{cases} \mu_0 K & (0 < r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

とわかる。