NO2 略解

0.

(a) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$　　$\nabla r = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cdots\right) = \frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} + \frac{z}{r}\hat{z} = \hat{r}$

したがって　$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\nabla r}{r^2} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

(b)

$$-\nabla\phi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{(-\nabla)\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}_{\to \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

で確かに(2)の右辺に一致する。

(c)

(i) No1-3の結果(最初の式)より

任意のスカラー場$\phi(\mathbf{r})$について　$\nabla\times(\nabla\phi) = 0$なので　$\nabla\times\mathbf{E} = 0$

はみたされている。

(ii) $$\nabla\cdot\mathbf{E} = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0}(\underbrace{-\nabla\cdot\nabla}_{=\Delta})\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \overset{(4)を仮定}{=} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0}(4\pi)\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$$

で確かに(4)を仮定すれば

$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ もみたされている。

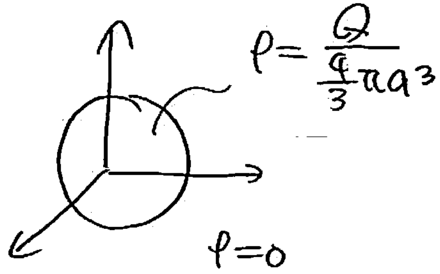
1.

(a) $$\Delta(1/r) = \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} \overset{0.(a)の結果}{=} -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} = -\frac{3}{r^3} + 3\frac{r^2}{r^5} = 0$$

(b) $$\int_{V(a)} dV\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \int_{V(a)} dV\,\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r} \overset{ガウスの定理}{=} \int_{S(a)} dS\,\hat{r}\cdot\underbrace{\nabla\frac{1}{r}}_{-\frac{\hat{r}}{r^2}}$$ ← 0.(a)の結果

$$= -4\pi\frac{a^2}{a^2} = -4\pi$$　(aによらない)。

2.



ガウスの定理

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \longrightarrow \int_S dS\, \hat{n}\, \mathbf{E} = \int_V d\mathbf{r}\, \rho/\epsilon_0 \quad \cdots (*)$$

Vとして原点を中心とする半径rの球、Sをその表面とする。

電荷分布の球対称性から電場も球対称である事を仮定する

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\hat{r}$$

動径方向の単位ベクトル

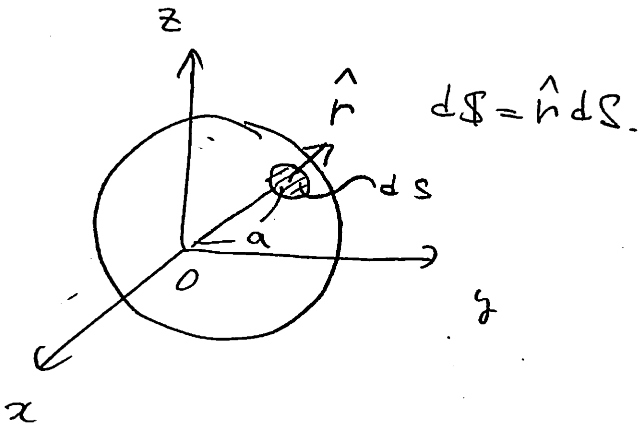
Sの外向き法線ベクトルも$\hat{n} = \hat{r}$であるので

$$(*) \longrightarrow \quad 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{Q/\epsilon_0}{\frac{4}{3}\pi a^3} & (0 < r < a) \\ Q/\epsilon_0 & (r > a). \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(\frac{r}{a}\right)^3 & (0 \le r < a) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r \ge a) \end{cases}$$

電場の向きは $\hat{r}$

3.



$$\int_{S(a)} \overset{f(r)\hat{r}}{\mathbf{j}(\mathbf{r})} \cdot \overset{\hat{r}\,dS}{d\mathbf{S}} = 4\pi a^2 f(a)$$

(b) $\hat{r} = \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}\right)$

なので $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = f(r)\left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}\right)$

$$\nabla\cdot\mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{f(r)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{f(r)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{f(r)}{r}\right)$$

$$= 3\frac{f(r)}{r} + r\left(\frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2}\right)$$

$$= 2\frac{f(r)}{r} + f'(r)$$

(c)

$$\int_{V(a)} \nabla\cdot\mathbf{j}\,dV = 4\pi\int_0^a dr\, r^2\left\{2\frac{f(r)}{r} + f'(r)\right\} = 4\pi\int_0^a dr\,\left(r^2 f(r)\right)'$$

$$= 4\pi a^2 f(a)$$

確かに(a)の結果と一致している。