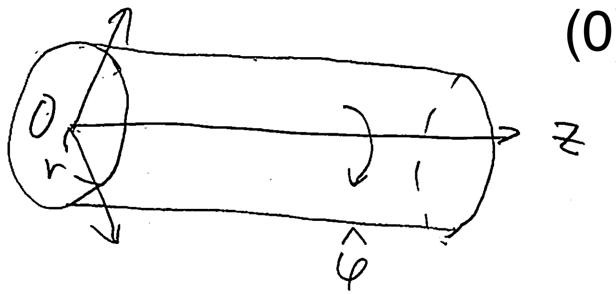
No12 　略解

0、　コイルの中心軸のまわりに円筒座標系をとる。



(0)　コイルの表面電流密度は $\mathbb{K}=nI\hat{\varphi}$ 　→ これが外部電流

→ no4-1 の結果を用いて、外部

$\mathbb{H}(r)=\mathbb{K}=nI\hat{z}$

中心軸からの距離

$(\nabla\times\mathbb{H}=\mathbb{K}\delta(r-R_0))$

(1)　$B_0=\mu_0 H=\mu_0 nI$

$$\nabla\times\mathbb{E}=-\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}$$

→ z軸に垂直な断面で両辺を面積分すると

コイル一巻きあたりの起電力 → $\int d\mathbb{S}\cdot(\nabla\times\mathbb{E})=\oint_{\text{コイル一巻き}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbb{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int d\mathbb{S}\cdot\mathbb{B}}_{\pi R_0^2 B_0}=-\mu_0 n\pi R_0^2\frac{\partial I}{\partial t}$

コイル全体でのインダクタンスは
(コイルの巻き数は nh)　$L_0=\mu_0 n^2\pi R_0^2 h$

(2)　Hはrに関わらず $H=nI$

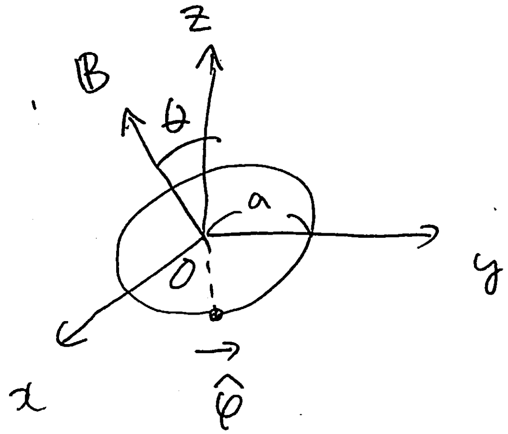
$$B(r)=\begin{cases}\mu H & 0<r<R\\ \mu_0 H & R<r<R_0\end{cases}$$

コイル全体でのインダクタンスは

$$L=L_0\frac{R_0^2-R^2}{R_0^2}+\frac{\mu}{\mu_0}L_0\frac{R^2}{R_0^2}=L_0\left(1+\underbrace{\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)}_{\chi}\frac{R^2}{R_0^2}\right)$$

$\chi>0$ ならば $R=R_0$ とすれば インダクタンスは最大となる。

1.

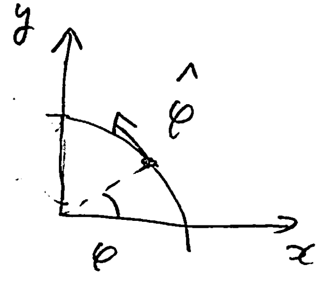


$$\mathbb{B} = B(\cos\theta\,\hat{z} + \sin\theta\,\hat{x})$$

$$d\mathbb{F} = I\,d\boldsymbol{\ell} \times \mathbb{B}$$

$$d\boldsymbol{\ell} = a\,d\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$$



したがって

$$d\mathbb{F} = d\varphi\,IaB(-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}) \times (\cos\theta\,\hat{z} + \sin\theta\,\hat{x})$$

$$= d\varphi\,IaB(\sin\varphi\cos\theta\,\hat{y} + \cos\varphi\cos\theta\,\hat{x} - \cos\varphi\sin\theta\,\hat{z})$$

$$\int d\mathbb{F} = \int d\varphi \cdots = 0$$

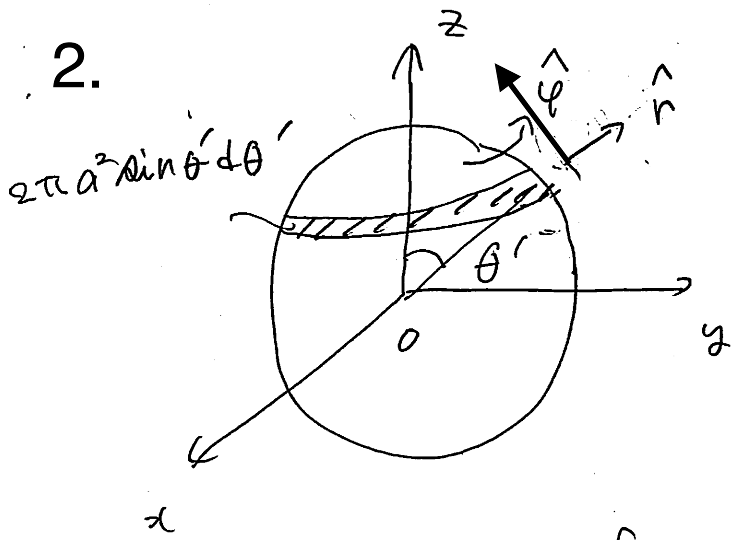
$$\mathbb{N} = \int d\mathbb{N} = \int \underbrace{a(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y})}_{\text{原点からリング上の点までのベクトル}} \times d\mathbb{F} = Ia^2B\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\cdots \cos^2\varphi\sin\theta\,\hat{y}\right]$$

$$= \underbrace{I(\pi a^2)}_{|\mathbb{m}|}B\sin\theta\,\hat{y}$$

$$= \mathbb{m} \times \mathbb{B}$$

磁場にそろうように働いている。

2.



表面上の点 $(a\cos\theta', a\sin\theta'\cos\varphi', a\sin\theta'\sin\varphi')$

その表面磁化電流は、

$$\mathbb{K} = -\underset{\text{原点から球殻方向への単位ベクトル}}{\hat{r}} \times M\hat{z} = M\sin\theta'\,\hat{\varphi}'$$

$$\mathbb{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{球殻上}} dS\, \frac{M\sin\theta'(\hat{\varphi}'\times\mathbb{R})}{R^3}$$

$\mathbb{R}$: 球殻上の点から $z\hat{z}$ までのベクトル

$$\mathbb{R} = z\hat{z} - a\hat{r}'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\pi d\theta'\, 2\pi a^2 \sin\theta'\, \frac{M\sin\theta'(\hat{\varphi}'\times\mathbb{R})}{R^3}$$

$$R = (z^2 + a^2 - 2za\cos\theta')^{1/2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\pi a^3 M\hat{z} \times \int_0^\pi d\theta' \frac{(\sin\theta')^3}{(z^2+a^2-2za\cos\theta)^{3/2}}$$

$$\hat{\varphi}\times\mathbb{R} = z(\hat{\varphi}'\times\hat{z}) - a\underbrace{(\hat{\varphi}'\times\hat{r}')}_{-\hat{\theta}'}$$

$$\hat{\theta}' = \sin\theta'\hat{z} + \cos\theta'\cos\varphi'\hat{x} + \cos\theta'\sin\varphi'\hat{y}$$

$t = \cos\theta$

$$= \frac{\mu_0}{2}a^3 M\hat{z}\int_{-1}^{1} dt\, \frac{1-t^2}{(z^2+a^2-2zat)^{3/2}}$$

右の結果から

1) $z=0$では

$$\mathbb{B}(0) = \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{z}$$

2) $|z| \gg a$では

$$\mathbb{B}(z) \simeq \frac{2\mu_0 M a^3}{3z^3}\hat{z}$$