電磁気学演義 NO1略解

アインシュタインの規約

1.

(a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$

$$= A_xB_x \underbrace{\hat{x}\cdot\hat{x}}_{=1} + A_xB_y \underbrace{\hat{x}\cdot\hat{y}}_{=0} + \cdots = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = A_iB_i$$

(b) $$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \left(\sum_{j=1}^{3} A_j\hat{e}_j\right)\times\left(\sum_{k=1}^{3} B_k\hat{e}_k\right) = \sum_{j,k} A_jB_k\,\hat{e}_j\times\hat{e}_k$$

したがって $$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i = \sum_{j,k} A_jB_k\,(\hat{e}_j\times\hat{e}_k)_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$$

(c) $\hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_3,\quad \hat{e}_2\times\hat{e}_3 = \hat{e}_1,\quad \hat{e}_3\times\hat{e}_1 = \hat{e}_2$

また外積の性質として $\hat{e}_i\times\hat{e}_j = -\hat{e}_j\times\hat{e}_i,\quad \hat{e}_i\times\hat{e}_i = 0$

に注意する。

(d) 略。

1.

(a) $(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A_j B_k C_i = \sum_{ijk} \underset{= \epsilon_{kij}}{\epsilon_{ijk}} B_k C_i A_j = (\mathbb{B}\times\mathbb{C})\cdot\mathbb{A}$

同様に $(\mathbb{C}\times\mathbb{A})\cdot\mathbb{B}$ も等しい.

(b) $[\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C})]_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} A_j \sum_{lm} \epsilon_{klm} B_l C_m$

$= \sum_{jlm} A_j B_l C_m \underbrace{\sum_k \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} = \underset{[(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B}]_i}{\sum_j A_j B_i C_j} - \underset{[(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C}]_i}{\sum_j A_j B_j C_i}$

(c) $\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) + \mathbb{B}\times(\mathbb{C}\times\mathbb{A}) + \mathbb{C}\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B})$

$= (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C}$

(b)の結果 → $+ (\mathbb{B}\cdot\mathbb{A})\mathbb{C} - (\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})\mathbb{A}$ $= 0$

$+ (\mathbb{C}\cdot\mathbb{B})\mathbb{A} - (\mathbb{C}\cdot\mathbb{A})\mathbb{B}.$

2.

$$[\nabla \times (\nabla \phi)]_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = \frac{1}{2}\left[\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi + \sum_{kj} \epsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \phi\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{jk} (\epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk}) \partial_j \partial_k \phi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = \sum_{ijk} \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k + \sum_{jik} \epsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ijk} (\epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk}) \partial_i \partial_j A_k = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = (\nabla \cdot A) A - (\nabla \cdot \nabla) A = (\nabla \cdot A) A - \nabla^2 A$$

2(c) を用いた．

3. (a)

$$I^2 = \left(\int dx\, e^{-x^2}\right)^2 = \int dx \int dy\, e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-r^2}}_{-\frac{1}{2} e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}} = \pi.$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

$x = \sqrt{\alpha}\, y$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\alpha y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \cdots *$$

(b) $*$ の両辺を α で微分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, (-y^2)\, e^{-\alpha y^2} = \sqrt{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\alpha^{-3/2}$$

同様にして

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, (-y^2)^n\, e^{-\alpha y^2} = \sqrt{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \overbrace{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}^{(2n-1)!!}\, \alpha^{-\frac{2n+1}{2}}$$

これから

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^{2n}\, e^{-\alpha y^2} = \sqrt{\pi}\, \frac{(2n-1)!!}{2^n}\, \alpha^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\Delta^2}}}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, (x-a)^n\, \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\Delta^2}}}{\sqrt{2\pi\Delta^2}}}$$

n:奇数の項は0になる.

$n=2m$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^{2m}\, e^{-\frac{y^2}{2\Delta^2}}}_{\text{(b)の結果より}}$$

$$\sqrt{\pi}\,\frac{(2m-1)!!}{2^m}\,\Delta^{m+1/2}$$

$$= f(a) + \sum_{m=1}^{\infty} f^{(2m)}(a)\,\frac{(2m-1)!!}{2^{m+1/2}}\,\Delta^m \underset{\Delta\to 0}{\to} 0.$$

したがって

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\Delta^2}}}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} = f(a)$$