

場  $\psi(\mathbf{r}, t)$  が波動方程式

$$\square \psi(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}, t) \quad \text{ただし} \quad \square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

に従うとする。右辺の  $s(\mathbf{r}, t)$  は場を作る source を表わす。無限遠で 0 になる解は

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int dV' dt' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') s(\mathbf{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{s(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

と書ける。ここで  $G(r, t)$  は、 $s(\mathbf{r}, t) = \delta^3(\mathbf{r})\delta(t)$  の場合の特別解 (Green 関数) で、3 次元での具体的な形は  $G(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-r/c)}{r}$  であることを用いた。

0. ドップラー効果を考えてみよう。場を作る source として、移動しながら周波数  $f_0$  で振動する「音源」のようなものを考え、 $s(\mathbf{r}, t) = s_0 \cos(2\pi f_0 t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$  としてみよう。 $\mathbf{r}_0(t)$  は時刻  $t$  での source の位置を表す。

(a) この source が作る場は次のように表せることを示せ。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -C \frac{s_0 \cos(2\pi f_0 t^*)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t^*)|} \quad \text{ただし} \quad t^* = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t^*)|}{c}$$

ここで  $C$  はヤコビアンによる因子であるが、あらわな形は考えなくて良い。またデルタ関数  $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$  の引数が 0 になる  $t$  が複数ある場合は考えなくて良い。

- (b)  $x$  軸上を移動する source  $\mathbf{r}_0(t) = -vt\hat{x}$  ( $c > v > 0$ ) がある場合、原点で観測される場を考えてみよう。source は時刻  $t = 0$  で原点を通過する。観測される実効的な周波数  $f$  は  $f = \frac{c}{c \mp v} f_0$  のようになることを示せ。ここで符号  $\mp$  は、 $t < 0$ 、 $t > 0$  にそれぞれ対応している。

1. 真空中の無限に広い面  $x = 0$  の上を、均一な電流が  $y$  方向に流れている場合を考える。電流は、時刻  $t = 0$  にスタートしたとする。ただしこの面は電氣的に中性で表面電荷密度は 0 とする。<sup>1</sup> 電流密度は  $\mathbf{j} = K\delta(x)\theta(t)\hat{y}$  と表せる。対称性から物理量は  $(x, t)$  のみの関数であるとして良いだろう。この系の磁場  $\mathbf{B}(x, t)$  および電場  $\mathbf{E}(x, t)$  を求めたい。

(参考) 電流が定常的に流れ続けている場合は No5-2 で考えた。その結果から、十分時間が経過したのちには静磁場  $B(x) = -\frac{\mu_0 K}{2} \text{sgn}(x)\hat{z}$  ができていると期待される。ここで  $\text{sgn}(x) \equiv 2\theta(x) - 1$  で  $x$  の符号を返す関数である。

<sup>1</sup>この例題は、ファイマン物理学 18 章、20 章で議論されている。参考にせよ。ただしここでは違う方法 (ファイマン物理学では 21 章) で取り組む。

- (a) 電荷、電流によって生じる電磁場はポテンシャル  $(A, \phi)$  から求めることができる。No 8-2 でやったようにローレンツゲージを取ればベクトルポテンシャル  $A$ 、スカラーポテンシャル  $\phi$  はそれぞれ電流密度、電荷密度を source とする波動方程式

$$\square \phi(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r}, t)/\epsilon_0 \quad \square \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

に従う。今、電荷密度が0なので、スカラーポテンシャル  $\phi$  は0である。系の対称性からベクトルポテンシャルも  $\mathbf{A}(x, t)$  のように  $x, t$  のみの関数で、例えば点  $(x, 0, 0)$  を選んで計算すれば良いであろう。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(x, t)$  を求めよ。(ヒント： $x$  軸を中心とする円筒座標系が便利である。)

- (b) 上の結果から、電場と磁場を求めよ。(ヒント：階段関数  $\theta(x)$  の  $x$  微分はデルタ関数  $\delta(x)$  である。また  $f(a) = 0$  ならば  $f(x)\delta(x - a) = 0$  として良い。)
- (c) 時刻  $t(> 0)$  における電磁場のエネルギー密度  $u_{\text{em}}(x, t)$ 、ポインティングベクトル  $\mathbf{S}(x, t)$  を求めよ。エネルギー密度の空間分布の様子を図示せよ。
- (d) その後、ある時刻  $t_1(> 0)$  で電流を止めた場合を考える。時刻  $t(> t_1)$  での電磁場のエネルギーの空間分布を図示せよ。(ヒント：電流を切ることを「重ね合わせ」で考えると?)