

0. 真空中を z 軸方向に伝わる平面電磁波を考える。電場が

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$$

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t)$$

とあらわせるとき、磁束密度 \mathbf{B} を求め、 \mathbf{E} と直交することを示せ。また \mathbf{E} と \mathbf{B} の位相関係、波の伝播速度と k 、 ω の関係を求めよ。なお、静磁場は存在しないものとする。

(ヒント) マクスウェル方程式を使う。

1. z 軸方向にまっすぐ伸びた金属の導線の中を自由電子が流れている。導線の断面は、半径 a の円とする。ただし、金属中には動かない正イオンもあり、電氣的に中性である。この金属の抵抗率を ρ とする。電場は金属内で一様で $\mathbf{E} = E\hat{z}$ ただし $E > 0$ とする。その結果、時間的に定常かつ一様な電流が $+z$ 方向に流れているとする。

- (a) 単位長さあたり、単位時間に熱として失われるエネルギーを求めよ。
 (b) 磁場、およびポインティングベクトルを求めよ。ただし、導線表面と導線内部だけで良い。
 (c) 単位長さあたり、単位時間に、表面から出入りする電磁場のエネルギーを求め、(1) の結果と整合していることを確かめよ。

2. 真空中の Maxwell 方程式は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

- (a) スカラーおよびベクトルポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) を用いて

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$$

としてみる。Maxwell 方程式のうち、2つの式はこれで満たされていることを示せ。また、ある任意の場 $\chi(\mathbf{r}, t)$ を用いて $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ 、 $\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$ としても \mathbf{B} 、 \mathbf{E} は不変であることを示せ。

- (b) Lorentz ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$ を要請すると、Maxwell 方程式の残りの 2 式から

$$\square \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

が得られることを示せ。[講義では後者の導出を省略した。] ここで $\square = \Delta - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$ また $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ である。

- (c) ここで、 χ は波動方程式 $\square \chi = 0$ にしたがうことを示せ。