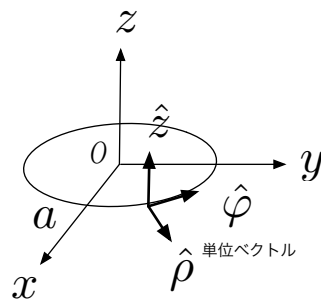


ある領域 V における電流密度場を $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ とすると、その磁気双極子モーメント \mathbf{m} およびそれによって出来る磁場のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は以下のように書ける。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int dV' (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (1)$$

ここで \mathbf{r}_0 はこの領域の中にとった点であるが、 $\int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}')$ は 0 なので、 \mathbf{m} は \mathbf{r}_0 の取り方に依存しない。

0. 半径 a の円形のリング上を強さ I の電流が流れている。この系の磁気双極子モーメント \mathbf{m} を求めよ。(ベクトルであることに注意) 図のようにリングに対して z 軸が垂直になる円筒座標系 (ρ, φ, z) を取れば、体積積分は $\int dV \dots = \int \rho d\rho d\varphi dz \dots$ 、電流密度は $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I\delta(\rho - a)\delta(z)\hat{\varphi}$ と表せる。



$$\begin{aligned} \hat{\rho} \times \hat{\varphi} &= \hat{z} & \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{\varphi} \times \hat{z} &= \hat{\rho} & \hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{\rho} &= \hat{\varphi} & \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y} \\ \hat{\rho} &= \cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{y} \\ \hat{\varphi} &= -\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y} \\ \hat{z} &= \hat{z} \end{aligned}$$

1. ある電流分布の「雲」があり、磁気双極子モーメント \mathbf{m} を持っている。
- (a) ベクトルポテンシャルを $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を求めよ。 \mathbf{m} の方向を z 軸とする。結果は、円筒座標系で表示せよ。(4重極子を含む高次の項は無視する。)
- (b) 磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を求め、その様子を大まかに図示せよ。円筒座標系での rotation の公式は以下のようなものである。

$$\mathbf{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z} \text{ として、}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \hat{\varphi} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right)$$

2. z 軸に垂直な 2 つの平面 1,2 の上を電流が x 方向に流れている。平面 1,2 はそれぞれ $z = z_1, z_2$ にあり、 $z_2 > z_1$ とする。それぞれの上で、電流に直交する直線(つまり y 方向の直線)を、単位長さあたり K_1, K_2 の電流が通過している。(電流の向きは $+x$ 方向を正とする。)

- (a) 平面 1,2 上の電流が作る磁場をそれぞれ求めよ。2つの平面は無限に広いとして良い。(ヒント: No5-3 の結果を使って良い。)
- (b) これらの重ね合わせから全体の磁場を求よ。
- (c) 2つの平面によって空間は3つの部分に分けられている。それぞれにおける Maxwell 応力テンソル $T_{\mu\nu} = (1/\mu_0)[B_\mu B_\nu - (1/2)\delta_{\mu\nu}|\mathbf{B}|^2]$ の各成分を求めよ。
- (d) 平面 1 および平面 2 の単位面積あたりの部分が受けるローレンツ力を求めよ。
- (e) Maxwell 応力テンソルを用いて d) と同じ結果が得られることを示せ。