電磁気学１演義　　　第 3 回　2018 年 4 月 24 日

0. 真空中に内径 a、外径 b の球殻があり、電荷 Q が一様に分布している。

   (1) 電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

   (2) これによって生じる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

   ヒント：電荷分布は原点を中心として球対称であることに留意せよ。

1. 真空中に内径 a、外径 b の無限に長い円筒があり、単位長さあたり $\lambda(>0)$ の電荷が一様に分布している。これによってできる、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

   ヒント：電荷分布は円筒の中心軸のまわりに回転対称であることに留意せよ。

2. 静電ポテシャルが原点を中心として球対称、すなわち $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(r)$ ただし $r = |\boldsymbol{r}|$ と表せるとする。このときの電荷の分布を考える。定義から電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$、また Maxwell 方程式より電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ である。

   (a) 電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ のような形で表せることを示せ。

   (b) 電荷密度は $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E(r))$ と表せることを示せ。

   (c) 原点を中心とする内径 $a(>0)$, 外径 $b(>0)$ の球殻状の領域に含まれる電荷量を $Q(a,b)$ とする。$Q(a,b) = 4\pi\epsilon_0[b^2E(b) - a^2E(a)]$ となることを示せ。(ヒント：(b) の結果を体積積分)

   (d) 原点を中心とする半径 r の球の内部を $V(r)$ とする。$V(r)$ に含まれる電荷の総量を $Q(r)$ とする．$Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)$ となることを示せ。(ヒント：ガウスの発散定理)

   (e) 具体的に

   $$\phi(r) = \frac{q_0}{\epsilon_0}\frac{e^{-kr}}{r}$$

   の場合を考えてみる。ただし、$k>0$ とする。この場合に $\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to 0} Q(a,b)$、$Q(0)$、$Q(\infty)$ を求めてみよ。矛盾がないか議論せよ。

3. N 個の電荷 $i = 1, 2, \ldots, N$ の電荷を q_i、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i(t)$、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_i(t)$ とする。電荷密度および電流密度は

   $$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t)) \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \boldsymbol{v}_i(t) \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i(t))$$

   と表せる。

(a) 上の $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ および $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ の定義式に基づき、これらが連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{j}$$

を満たしていることを示せ。$\boldsymbol{v}_i(t) = d\boldsymbol{r}_i(t)/dt$ に注意せよ。

(b) (a) の結果から、ある閉じた領域 V に含まれる全電荷 $Q(t)$ の時間変化は

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\int d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{j}$$

と表せることを示せ。ただし右辺の面積分は、領域 V を囲む表面とする。