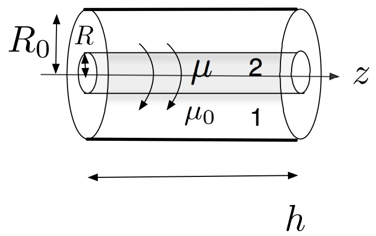
電磁気学１演義　　　　　　　第12回　2018年7月17日[1]

0. z 軸方向に伸びた、長さ h、半径 R_0 の円柱状のコイルを考える。コイルは導線を単位長さあたり n 回巻いたものであり、強さ I の電流が流れている。電流の向きは $+z$ 方向に見たとき、時計回りの方向である。(図の矢印の向き) コイルの中に、図のように半径 R の円柱状の磁性体が、コイルと同心円状に入っている (領域 2)。コイルと磁性体の中心軸を z 軸とする。磁性体の透磁率を $\mu = \mu_0(1+\chi)$ とする。コイルの内部で磁性体以外の領域 (領域 1) は真空とする。コイルの端の効果は無視し、磁場、磁化は z 軸に平行な成分しかないとする。



(1) 磁性体が入っていない場合の、磁場の大きさ B_0 、インダクタンス L_0 を求めよ。

(2) 図のように磁性体が入っている場合の磁場の大きさ $B(r)$ (r は中心軸からの距離)、インダクタンス L を求めよ。磁性体が帯磁率 $\chi > 0$ の常磁性体であるとすると、インダクタンスを最大にするためには R をどのように選べが良いか？

1. 半径 a の円形のリング上を強さ I の電流が流れている。リングの中心に原点をとり、$x-y$ 平面をリングと平行にとり、電流は反時計回りに流れているとする。No6 0 でこの系の作る磁気双極子モーメントが $\boldsymbol{m} = \pi a^2 I \hat{z}$ となることがわかった。今、この系が外部磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に置かれている。この系の位置エネルギーが $U = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$ のように表せることを示そう。

(a) リングに働くローレンツ力は全体としては 0、一方、ローレンツ力によるトルクは $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$ となることを示せ。[2]

(b) このトルクに逆らってする仕事を考えることにより、$U = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$ となることを示せ。ただし $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{B}$ が垂直なときエネルギーが 0 とする。[3]

---

[1]yoshino@cmc.osaka-u.ac.jp

[2]ヒント：例えば $\boldsymbol{B}$ が $x-z$ 平面内にあるように座標軸をとれば $\boldsymbol{B} = B(\cos(\theta)\hat{z} + \sin(\theta)\hat{x})$ となる。ここで θ は z 軸となす角である。リング上の点を $a(\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\phi)\hat{y})$ とすると ϕ から $\phi + d\phi$ の微小区間の受けるローレンツ力は $d\boldsymbol{F} = I(ad\phi)\hat{\phi}\times\boldsymbol{B}$ ただし $\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$ である。ここで ϕ は z 軸の周りの回転角、$\hat{\phi}$ はその回転方向の単位ベクトルである。

[3]ヒント： 力 $\boldsymbol{F}$ に逆らってする仕事によって増大するエネルギーは $dU = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ ここで微小変位 $d\boldsymbol{r}$ は、例えば、y 軸の周りに角度 $d\theta$ だけ回転させる場合、$d\boldsymbol{r} = rd\theta\hat{\theta}$ ただし r は y 軸との距離、$\hat{\theta} = \hat{y}\times\hat{r}$ はこの回転方向の単位ベクトルである。

2. 磁化 $\boldsymbol{M} = M\hat{z}$ で一様に磁化した半径 a 球形の磁性体を考える。球の中心を原点にとり、1) 球の中心および 2) z 軸上で、球から遠く離れた場所 $|z|/a \gg 1$ での磁場 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。(主要な項のみで良い)

ヒント：講義でやったように、磁性体の内部での磁化が $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ であるとき、その内部には電流密度 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ の電流 (磁化電流) が流れているとみなせる。また、その表面には「表面」磁化電流密度は $\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ の電流が流れているとみなせる。ここで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は表面の法線ベクトルである。