No9 略解

0. (a) $$s(\mathbf{r},t) = S_0 \cos(2\pi f_0 t)\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t))$$

$$\psi(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\int dV' \frac{s\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$= -\frac{S_0}{4\pi}\int dV' \frac{\cos\left(2\pi f_0\left[t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right]\right)\delta^3\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$= -C\frac{S_0}{4\pi}\frac{\cos(2\pi f_0 t^*)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t^*)|}$$

ここで
$$t^* = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t^*)|}{c}$$

(b) $$\mathbf{r}_0(t) = -ut\,\hat{x} \quad (u>0)$$

場合わけをする

(i) $t^*<0$ の場合、 $t^* = t + \frac{u}{c}t^* \rightarrow t^* = \frac{t}{1-u/c}$ (つまり $t<0$)

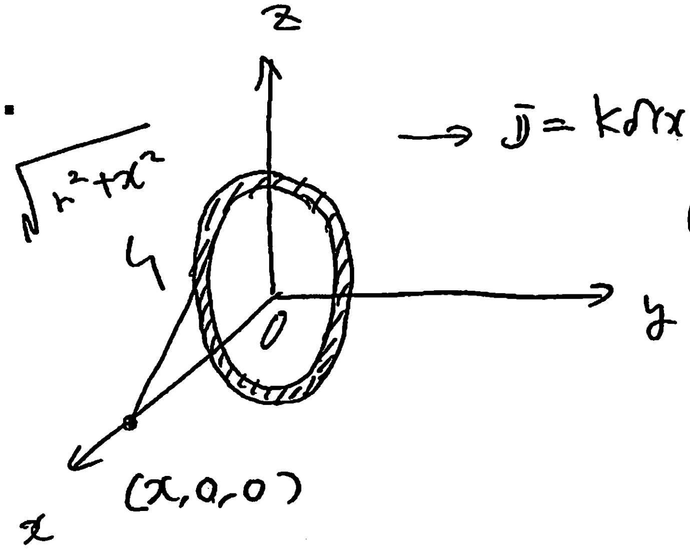
$$2\pi f_0 t^* = 2\pi \frac{f_0}{1-\frac{u}{c}}\,t$$

よって実効的な振動数は
$$f = \frac{f_0}{1-u/c}$$

(ii) $t^*>0$ の場合.

同様に考えると $f = \dfrac{f_0}{1+u/c}$.

2.



$\longrightarrow \ \mathbf{J} = k\delta(x)\theta(t)\,\hat{y}$

(注) 階段関数

(a)
$$\mathbf{A}(x,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty dr \; 2\pi r \, \frac{\theta\left(t - \frac{\sqrt{r^2+x^2}}{c}\right)}{\sqrt{r^2+x^2}} \, k \, \hat{y}$$

$$= \hat{y}\,\frac{\mu_0 k}{2}\underbrace{\int_0^{\sqrt{(ct)^2-x^2}} dr \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}}_{\sqrt{r^2+x^2}\Big|_0^{\sqrt{(ct)^2-x^2}}} \theta\left(t - \frac{\sqrt{r^2+x^2}}{c}\right)$$

$$= \hat{y}\,\frac{\mu_0 k}{2}(ct - |x|)\,\theta\left((ct)^2 - x^2\right)$$

(b) これから

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \hat{z}\frac{\partial A_y}{\partial x} = -\frac{\mu_0 k}{2}\theta\left((ct)^2-x^2\right)\mathrm{sgn}(x)\,\hat{z}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} = -c\,\frac{\mu_0 k}{2}\theta\left((ct)^2-x^2\right)\hat{y}$$

ここで $\mathrm{sgn}(x)$は xの符号を返す関数

＊(注) 正確には、階段関数の微分から
デルタ関数を含む項も出てくるが ここでは無視している。(伝播する光の先端部分)

(c) $$u_{em}(x,t) = \frac{\epsilon_0}{2}|\mathbb{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbb{B}|^2$$

$$\begin{cases} = \frac{\epsilon_0}{2} c^2 \left(-\frac{\mu_0 k}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(-\frac{\mu_0 k}{2}\right)^2 = \frac{\mu_0 k^2}{4} & |x| < ct \\ = 0 & |x| > ct \end{cases}$$

$$\mathbb{S} = \mathbb{E} \times \mathbb{H} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbb{E} \times \mathbb{B}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 k^2}{4} c \ \mathrm{sgn}(x)\ \hat{x} & |x| < ct \\ 0 & |x| > ct \end{cases}$$

(d) 上の解に $\mathbb{J} = -k\,\delta(x)\,\theta(t - t_1)$ の解を重ね合わせれば良い