電磁気1演義 No 8 略解

0.

$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(kz - \omega t + \phi)$ とおく.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial y}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial z}}_{0} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial x}}_{0} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \cdots ①$$

$$\underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial x}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial y}}_{0} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \rightarrow$$

同様にして $\underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y}}_{0} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \cdots ②$

①, ② から.

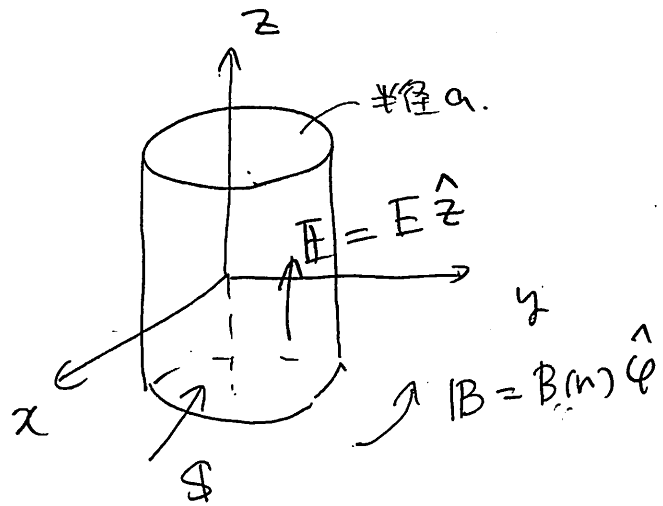
$$E_0 k \overset{\cos}{\cancel{\sin}}(kz - \omega t) = (B_0)_y \omega \overset{\cos}{\cancel{\sin}}(kz - \omega t + \phi)$$

$$-(B_0)_y k \overset{\cos}{\cancel{\sin}}(kz - \omega t + \phi) = -\epsilon_0 \mu_0 E_0 \omega \overset{\cos}{\cancel{\sin}}(kz - \omega t)$$

これから $(B_0)_y = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}\, E_0$ $\qquad \omega / k = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ (波の伝播速度)

$\phi = 0$ (位相のずれなし) $\qquad B_x = B_z = 0$ ($\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ は直交)

1.



(a) 抵抗率をρとしているので

$$j = \frac{E}{\rho}$$

単位長さあたりで失われるエネルギーは

$$j \cdot \mathbb{E}\,\pi a^2 = \pi a^2 \frac{E^2}{\rho}$$

(b)

z軸を中心に円筒座標系を取る.

軸対称性から $\mathbb{B}(r) = B(r)\hat{\varphi}$

と仮定して良いだろう.

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{j} \quad (\mathbb{j} = j\hat{z} : 導線の中で)$$

S: x-y面上の原点を中心とする半径 r の円

で両辺を面積分し, Stokesの定理を用いると

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{2\pi r}\pi r^2 j = \dfrac{\mu_0}{2} r \dfrac{E}{\rho} & (0<r<a) \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi r}\pi a^2 j = \dfrac{\mu_0}{2r} a^2 \dfrac{E}{\rho} & (r>a) \end{cases}$$

ポインティングベクトルは

$$\mathbb{S} = \mathbb{E} \times \mathbb{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbb{E} \times \mathbb{B} = \frac{r}{2}\frac{E^2}{\rho}\hat{z} \times \hat{\varphi}$$

$$= -\frac{r}{2}\frac{E^2}{\rho}\hat{r} \quad (0<r<a) \qquad (\hat{z} \times \hat{\varphi} = -\hat{r})$$

r>aでは 上のr=aでの値

(c) z方向に単位長さのリング状の部分Aを考え, ここで

$\mathbb{S}$を面積分すると

$$\int_A ds\, \hat{r} \cdot \mathbb{S} = 2\pi a \left(-\frac{a^2}{2a}\right)\frac{E^2}{\rho} = -\pi a^2 \frac{E^2}{\rho}$$

つまり $\pi a^2 E^2/\rho$ のエネルギーが単位時間あたり流入していて

これが熱として失われている。

2.

No1-4.

(a) $\nabla\times A' = \nabla\times A + \underbrace{\nabla\times(\nabla\chi)}_{0}$

$$\nabla\phi' + \frac{\partial}{\partial t}A' = \nabla\left(\phi + \frac{\partial}{\partial t}\chi\right) - \frac{\partial}{\partial t}(A + \nabla\chi)$$

$$= \nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t}A \underbrace{- \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi}_{0}$$

よって不変

(b) Lorentzゲージ $\nabla\cdot A + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$

$$\rho/\epsilon_0 = \nabla\cdot E = -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot A$$ ↓ Lorentzゲージ

$$= -\Delta\phi + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi$$

$$= \Box\phi$$

また

$$\mu_0 j = \nabla\times B - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} = \underbrace{\nabla\times(\nabla\times A)}_{-\Delta A + \nabla(\nabla\cdot A)} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}A\right)$$

$$= -\Box A + \nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot A + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)}_{0} = -\Box A$$

(c) $A' = A + \nabla\chi$, $\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi$ より $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = \underset{\chi\text{のsource}}{S(\mathbf{r},t)}$ 　 $S(\mathbf{r},t) = \nabla\cdot A' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi'$

((注) (A,ϕ) の方はLorentzゲージをみたしているとした))

$\phi = +$