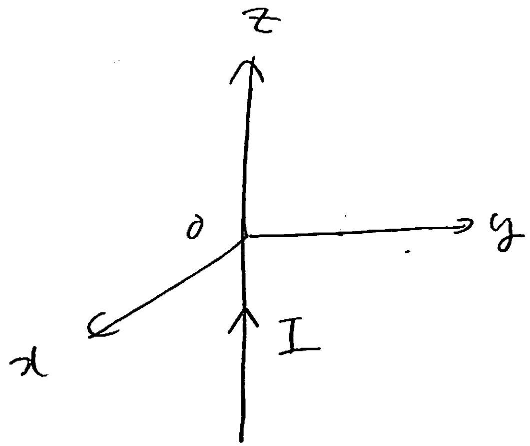
No5 略解

0.



$$\boldsymbol{j} = I\delta(x)\delta(y)$$

$$\nabla\cdot\mathbb{B} = 0 \quad \cdots ① \qquad \nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 I\delta(x)\delta(y) \quad \cdots ③$$

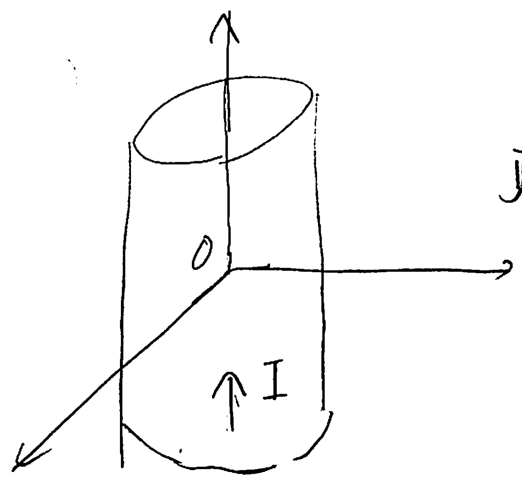
軸対称なので $\mathbb{B}(r) = B_r(r)\,\hat{r} + B_\varphi(r)\,\hat{\varphi}$ を仮定

① → 両辺を z軸を中心とする円柱内で体積積分，ガウスの定理を用いる → $B_r(r) = 0$ がわかる.

② → 両辺を z軸を中心とする円で面積分，ストークスの定理を用いる

$$\rightarrow B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

1.



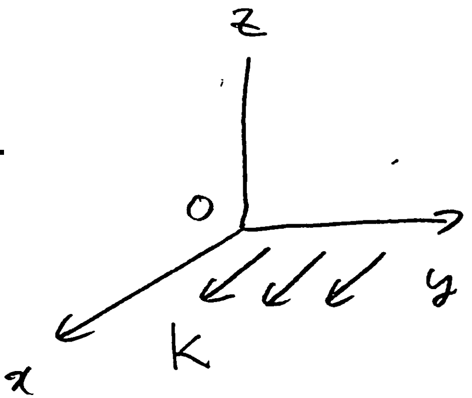
$$\boldsymbol{j}(r) = \begin{cases} \dfrac{I}{\pi a^2}\hat{z} & (0<r<a) \\ 0 & r>a \end{cases}$$

1. と同様に考えて

$$B_r(r) = 0$$

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 & (0<r<a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r>a) \end{cases}$$

2.



電流の流れている面を $z=0$ とする。

（電流密度は $\mathbf{j} = K\,\delta(z)\,\hat{x}$ ）

$z=0$ 面に対する反転対称性と、x-y 面内での並進対称性より

$\mathbf{B} = \mathbf{B}(z)$　　$\mathbf{B}(z) = -\mathbf{B}(-z)$ ···(＊) を仮定する。

$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \rightarrow \int_V dS\,\hat{n}\cdot\mathbf{B} = 0$ ···①

ガウスの定理

ここで V として $z=0$ をまたぐ任意の領域を考えると ①が成り立つためには

$B_z(z)=0$ が必要とわかる。

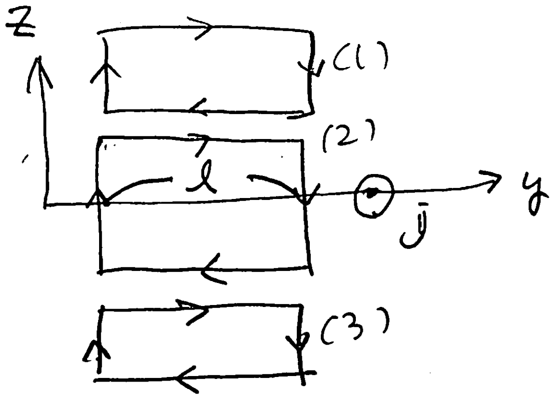
$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} \rightarrow \oint_C dl\,\hat{t}\cdot\mathbf{B} = \mu_0\int_S dS\,\hat{n}\cdot\mathbf{j}$ ···②

ストークスの定理

経路C上の接線方向の単位ベクトル

ここで S として y 軸に垂直な「任意」の面を考えると、$\mathbf{j}$ は y 成分を持たないので ②の右辺は0

一方、左辺の線積分は、$\mathbf{B}$ の x 成分と z 成分のみ関係する。したがって $B_x(z)=0$ も必要とわかる



最後に、x 軸に垂直な面上での② を考える。

(1)(3) のように $z=0$ 面をまたがっていなければ ②の右辺は0

(2) のように $z=0$ 面をまたいでいれば

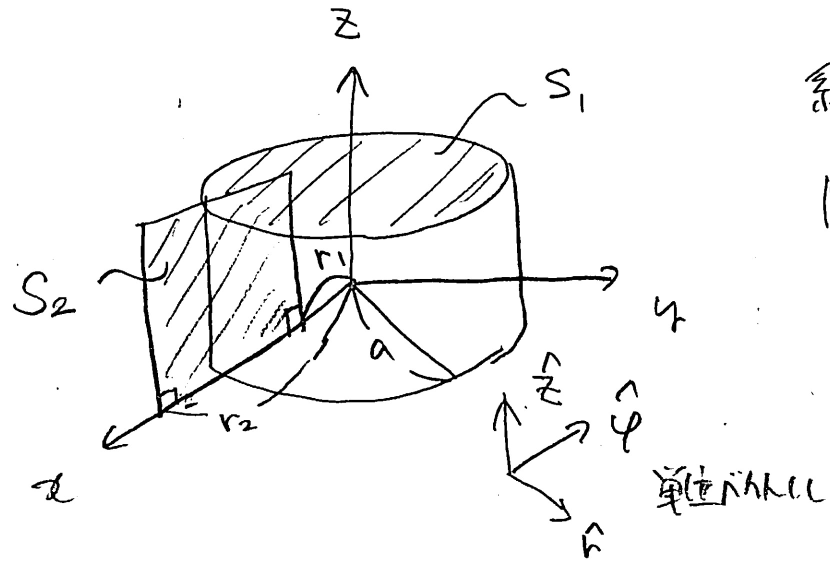
②の右辺 $= -\mu_0 K l$

（l は左図参照）

これから (＊) の反転対称性も考慮して

$$B_y(z) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2} & (z>0) \\ +\dfrac{\mu_0 K}{2} & (z<0) \end{cases} \qquad B_x = B_z = 0$$

3.



系がz軸を中心として回転対称であるので

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_r(r)\,\hat{r} + B_\varphi(r)\,\hat{\varphi} + B_z(r)\,\hat{z}$$ を仮定

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \xrightarrow[\text{ガウスの定理}]{} \int_V dS\,\hat{n}\cdot\mathbf{B} = 0 \quad \cdots ①$$

Vとしてz軸を中心とする円柱をとる

これで成立するためには　　　　(半径は任意)

$B_r = 0$ が必要

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \rightarrow \oint_C dl\,\hat{t}\cdot\mathbf{B} = \mu_0\int_S dS\,\hat{n}\cdot\mathbf{J} \quad \cdots ②$$

ストークスの定理

- ここでSとして図のS_1のようにz軸に垂直な円板を考えると、C上の接線ベクトル$\hat{t}$は$\hat{\varphi}$方向になる。電流$\mathbf{J}$はz成分を持たないので②の右辺$=0$　したがって　$B_\varphi = 0$ も必要
- 次にSとして図のS_2のように$\hat{\varphi}$方向に垂直な面を考える。これは、問題3のように電流の流れる面を含む場合／含まない場合で分けて考える。(詳細は省略)

また無限遠で $\mathbf{B}=0$ を要請すると

$$B_z(r) = \begin{cases} \mu_0 K & (0<r<a) \\ 0 & (r>a) \end{cases}$$

とわかる。