No4　略解

0.　(a)　$\nabla\cdot E = \dfrac{\sigma\delta(z)}{\epsilon_0} \rightarrow \dfrac{dE(z)}{dz} = \dfrac{\sigma\delta(z)}{\epsilon_0}$

これをzについて積分して.

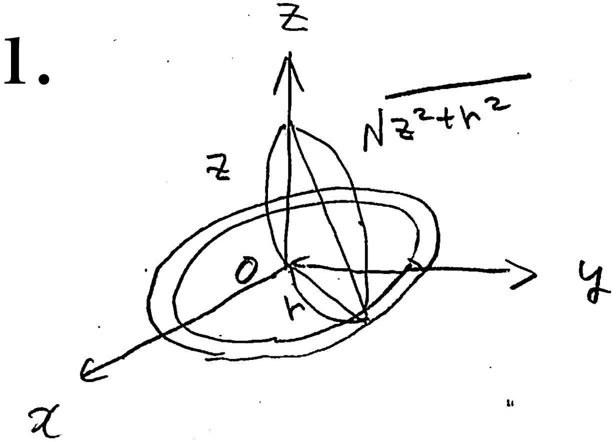
$$E(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\underbrace{\int_{-\infty}^{z} dz'\,\delta(z')}_{\theta(z)} + E(-\infty)$$

反転対称性を仮定すると
$E(z) = -E(-z)$

$$E(-\infty) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(b)　$\phi(z) = -\int dz\,E(z) = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0} z\,\theta(z) + E(-\infty)z + \phi(0)$

1.



(a) ポテンシャルを $\Phi(z)$ とすると

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{\sigma \quad 2\pi r\,dr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2} - 1\right)$$

(b) 電場は対称性から $\mathbf{E} = E(z)\,\hat{z}$

$$E(z) = -\frac{d\Phi(z)}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - 1\right)$$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(a/z)^2}} - 1\right)$$

(c)

$z/a \gg 1$ では $\quad E(z) \simeq \dfrac{\sigma}{4\epsilon_0}\dfrac{a^2}{z^2} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{z^2}$

$Q = \pi a^2 \sigma$ ：全電荷

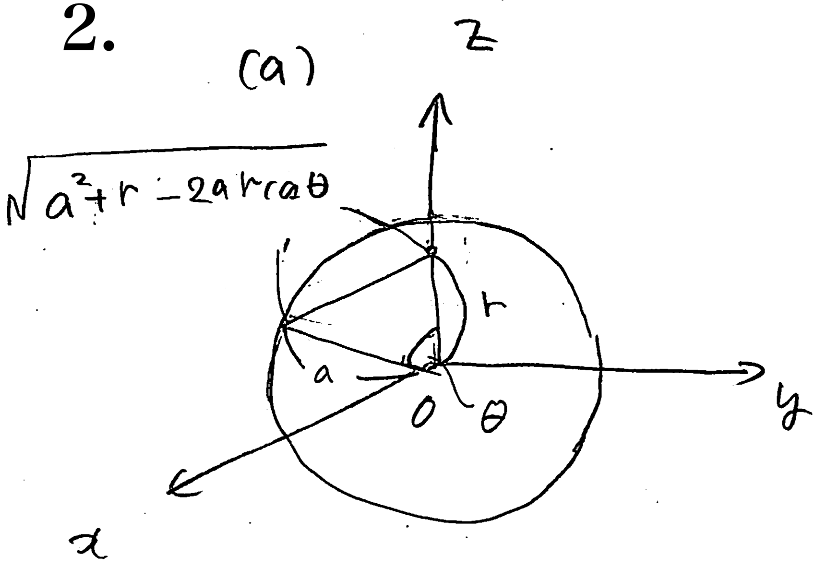
（十分遠くからは原点に電荷Qの点電荷があるのと同じように見える。）

$z/a \ll 1$ では $\quad E(z) \simeq \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$

これは1の結果（無限に広い平面 $a \to \infty$）の場合と一致している。

2.

(a)



(a)

対称性から静電ポテンシャルは $\phi = \phi(r)$

$$\phi(r) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}}_{I}$$

$r \equiv as$

$-\cos\theta \equiv t$

$$I = 2\pi a \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+s^2+2st}}$$

$$= 2\pi a \frac{1}{s} \sqrt{1+s^2+2st} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2\pi a}{s}\left(|1+s| - |1-s|\right)$$

球の内側 ($0<s<1$) では

$$\phi(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a$$

球の外側 ($s>1$) では

$$\phi(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{a}{s} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{a^2}{r}$$

(b) $\mathbf{E} = -\nabla\phi(r) = E(r)\,\hat{r}$

球の内側では $E(r) = 0$

球の外側では $E(r) = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\dfrac{a^2}{r^2}$