電磁気学演義 no3

0.

(1) 球殻の体積は $\frac{4}{3}\pi(b^2-a^2)$ したがって $\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi(b^3-a^3)} & \text{球殻の中} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$

(2) 球対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$ と仮定する。
原点を中心とする半径 r の球の内部を $V(r)$、その表面を $S(r)$ とすると

$$\int_{V(r)} dV\, \nabla\cdot\mathbf{E} = \int_{S(r)} d\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}(r) = \int dS\, \hat{\mathbf{r}}\cdot E(r)\hat{\mathbf{r}} = 4\pi r^2 E(r)$$

→ ガウスの定理

Maxwell方程式
$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$
の両辺を $V(r)$ で体積積分すると

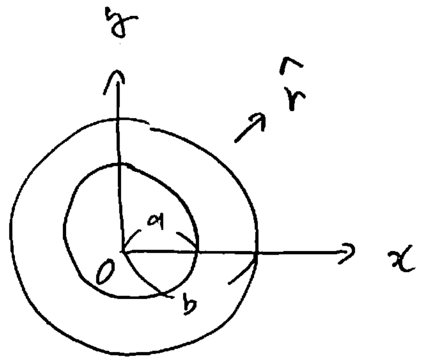
一方、

$$\int_{V(r)} dV\, \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \begin{cases} 0 & (a > r > 0) \\ \dfrac{\rho}{\epsilon_0}\dfrac{4}{3}\pi(r^3-a^3) & (b > r > a) \\ Q/\epsilon_0 & (r > b) \end{cases}$$

したがって

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (a > r > 0) \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\dfrac{r^3-a^3}{b^3-a^3} & (b > r > a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > b) \end{cases}$$

1.



図の様に座標をとる(円筒はz軸方向に伸びている)

z軸まわりに回転対称な電荷分布であるので

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\hat{r}$$ と仮定できる.

z軸に垂直な単位ベクトル.

1の(*)で Vとして原点を中心とする半径r, z軸方向に単位長さを持つ円柱をとる. Sをその表面とする.

(*) →

$$2\pi r\,E(r) = \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq a) \\ \dfrac{\lambda}{\pi(b^2-a^2)}\,\pi(r^2-a^2)/\epsilon_0 & (a \leq r \leq b) \\ \lambda/\epsilon_0 & (r > b) \end{cases}$$

$$\therefore\ E(r) = \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq a) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\dfrac{r^2-a^2}{b^2-a^2} & (a \leq r \leq b) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} & (r > b) \end{cases}$$

電場の向きは $\hat{r}$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right)}_{\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \hat{r}}$$

2.

(a) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(r) = -\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right)\phi'(r) = E(r)\hat{r}$

ただし $E(r) = -\phi'(r)$

(b) $\rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E(r)}{r}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E(r)}{r}y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E(r)}{r}z\right)\right]$

$= \epsilon_0\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{E(r)}{r}\right)\underbrace{\frac{x^2+y^2+z^2}{r}}_{=r} + 3\frac{E(r)}{r}\right] = \epsilon_0\left[\frac{E'(r)}{r} + 2\frac{E(r)}{r}\right]$

$= \epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 E(r)\right)$

(c) $Q(a,b) = \int_a^b dr\, 4\pi r^2 \rho(r)$

$= \int_a^b dr \frac{d}{dr}\left(r^2 E(r)\right) = 4\pi\epsilon_0\left(b^2 E(b) - a^2 E(a)\right)$

(d) $Q(r) = \int_{V(r)} dV \rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \int_{S(\mathbf{r})} d\vec{S}\cdot E(r)\hat{r} = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)$,　$d\vec{S} = dS\,\hat{r}$

Maxwell方程式 $\rho = \epsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}$ とガウスの発散定理

(e) $E(r) = -\phi'(r) = -\frac{q_0}{\epsilon_0}\left(-\frac{e^{-kr}}{r^2} - k\frac{e^{-kr}}{r}\right) = \frac{q_0}{\epsilon_0}(1+kr)\frac{e^{-kr}}{r^2}$

これから. $\lim_{b\to\infty}\lim_{a\to 0} Q(a,b) = 4\pi\cancel{\epsilon_0}\frac{q_0}{\cancel{\epsilon_0}}(0-1) = -4\pi q_0$ という事で 矛盾していないけ.

一方. $Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = 4\pi q_0(1+kr)e^{-kr}$ なので.

$Q(0) = 4\pi q_0$. $Q(\infty)$. つまり原点に"点"電荷 $4\pi q_0$. それ以外に $-4\pi q_0$ の電荷があって、全体では電荷0

3.

(a)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))} = -\sum_{i=1}^{N} q_i(\mathbf{v}_i\cdot\nabla)\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\delta(x-x_i(t))\,\delta(y-y_i(t))\,\delta(z-z_i(t))\right)$$

$$= \left(-\frac{dx_i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dy_i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{dz_i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta(x-x_i(t))\,\delta(y-y_i(t))\,\delta(z-z_i(t))$$

$$= (-\mathbf{v}_i(t)\cdot\nabla)\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))$$

$$= -\nabla\cdot\sum_{i=1}^{N} q_i\mathbf{v}_i\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)) = -\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$$

(b)

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int dV\,\rho(\mathbf{r},t) = \int dV\,\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \int dV\,(-\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t))$$

$$= -\int d\mathbf{S}\cdot\mathbf{j}$$

ガウスの定理