電磁気学1演義 No2

0.

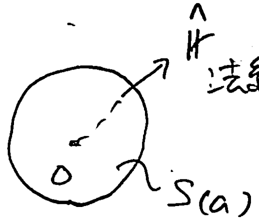
(a) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \nabla r = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cdots \right) = \dfrac{x}{r}\hat{x} + \dfrac{y}{r}\hat{y} + \dfrac{z}{r}\hat{z} = \hat{r}$

したがって $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\nabla r}{r^2} = -\dfrac{\hat{r}}{r^2}$

(b) $$\Delta(1/r) = \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3}$$
$$= -\frac{3}{r^3} + 3\left(\frac{x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{y}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{z}{r^4}\frac{\partial r}{\partial z}\right) = -\frac{3}{r^3} + 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = 0$$

(c) $$\int_{V(a)} dV\, \Delta(1/r) = \int_{V(a)} dV\, \nabla\cdot\nabla\frac{1}{r} = \int_{S(a)} d\boldsymbol{S}\cdot\nabla\frac{1}{r} \rightarrow -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

ガウスの定理　　(a)の結果より



法線ベクトルは
動径方向外向き.
$d\boldsymbol{S} = dS\,\hat{r}$

$$= \int_{S(a)} dS\, \hat{r}\cdot\left(-\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = -4\pi$$

aによらない

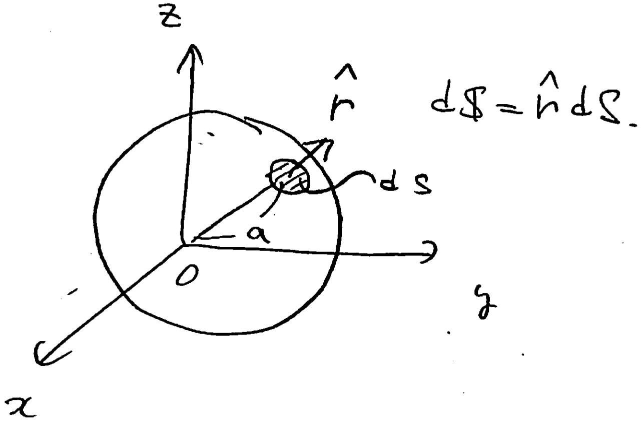
note

$$\int_V dV \left(-\frac{1}{4\pi}\right)\Delta\frac{1}{r} = \begin{cases} 1 & (Vが原点を含むとき) \\ 0 & (それ以外) \end{cases}$$

である事がわかるので $\quad -\dfrac{1}{4\pi}\Delta\dfrac{1}{r} = \delta^3(\boldsymbol{r})$

$f(r)\hat{r}$ $\quad$ $\hat{r}\,dS$

1. (a) $$\int_{S(a)} \mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = 4\pi a^2 f(a)$$



(b) $$\hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

なので $$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = f(r)\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{f(r)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{f(r)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{f(r)}{r}\right)$$
$$= 3\frac{f(r)}{r} + r\left(\frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2}\right)$$
$$= 2\frac{f(r)}{r} + f'(r)$$

(c) $$\int_{V(a)} \nabla\cdot\mathbf{j}\,dV = 4\pi\int_0^a dr\, r^2\left\{2\frac{f(r)}{r} + f'(r)\right\} = 4\pi\int_0^a dr\,\left(r^2 f(r)\right)'$$
$$= 4\pi a^2 f(a)$$

確かに (a) の結果と一致している。

2、

$$\nabla \times (-\nabla \phi) = 0 \qquad (\text{No1-2より})$$

なので

$\nabla \times \mathbb{E} = 0$ はみたしている.

一方,

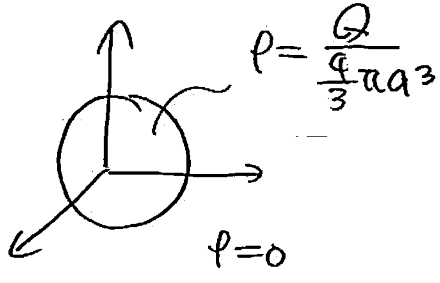
$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \nabla \cdot (-\nabla \phi) = -\Delta \phi = -\Delta \int dV' \frac{\rho(\mathbb{r}')}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}'|}$$

$$= \int dV' \frac{\rho(\mathbb{r}')}{\epsilon_0} \underbrace{\Delta \left(-\frac{1}{4\pi}\right) \frac{1}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}'|}}_{\delta^3(\mathbb{r} - \mathbb{r}')} \qquad \text{0の結果より)}$$

$$= \frac{\rho(\mathbb{r})}{\epsilon_0}$$

つまり, $\nabla \cdot \mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ もみたされている。

3.



ガウスの定理

$$\nabla\cdot \mathbf{E} = \rho \longrightarrow \int_S dS\,\hat{n}\,\mathbf{E} = \int_V d\mathbf{r}\,\rho/\epsilon_0 \quad \cdots (*)$$

Vとして原点を中心とする半径rの球、Sをその表面とする。

電荷分布の球対称性から電場も球対称である事を仮定する

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\,\hat{r}$$

動径方向の単位ベクトル

Sの外向き法線ベクトルも $\hat{n} = \hat{r}$ であるので

$$(*) \longrightarrow \quad 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \dfrac{Q/\epsilon_0}{\frac{4}{3}\pi a^3} & (0<r<a) \\ Q/\epsilon_0 & (r>a). \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 & (0\leq r<a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r\geq a) \end{cases}$$

電場の向きは $\hat{r}$