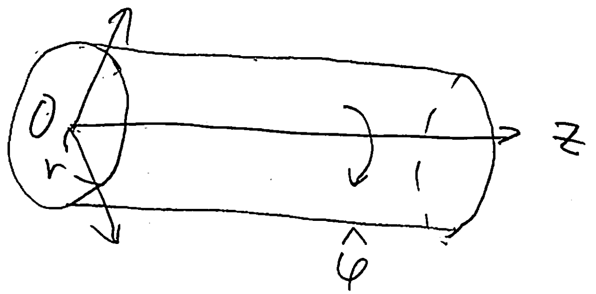
No12 　略解

0、 コイルの中心軸のまわりに円筒座標系をとる。　　　　↗ これが外部電流



コイルの表面電流密度は $\mathbb{K} = nI\hat{\varphi}$

→ No5-3の結果を用いて、外部

$\mathbb{H}(r) = \mathbb{K} = nI\hat{\varphi}$

中心軸からの距離

$(\nabla\times\mathbb{H} = \mathbb{K}\delta(r-R_0))$

(1) $B_0 = \mu_0 H = \mu_0 nI$

$$\nabla\times\mathbb{E} = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}$$

→ z軸に垂直な断面でrotを面積分すると

コイル一巻きあたりの起電力 → $\int dS\cdot(\nabla\times\mathbb{E}) = \oint_{\text{コイル一巻き}} d\ell\cdot\mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int dS\cdot\mathbb{B}}_{\pi R_0^2 B_0} = -\mu_0 n\pi R_0^2\frac{\partial I}{\partial t}$

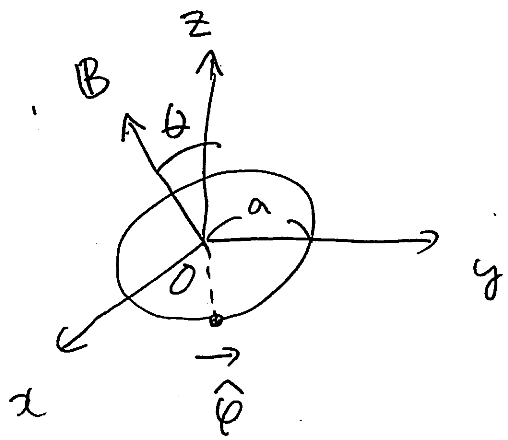
コイル全体でのインダクタンスは
(コイルの巻数は nh)　　$L_0 = \mu_0 n^2\pi R_0^2 h$

(2) Hはrに関わらず $H = nI$　　　$B(r) = \begin{cases}\mu H & 0<r<R \\ \mu_0 H & R<r<R_0\end{cases}$

コイル全体でのインダクタンスは $L = L_0\frac{R_0^2-R^2}{R_0^2} + \frac{\mu}{\mu_0}L_0\frac{R^2}{R_0^2} = L_0\left(1+\underbrace{\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)}_{x}\frac{R^2}{R_0^2}\right)$

$x>0$ ならば $R=R_0$ とすれば インダクタンスは最大になる。

1.

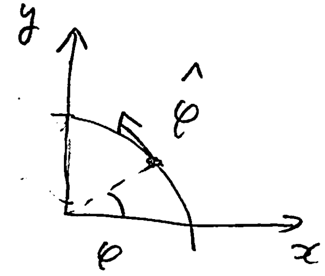


a) $\mathbb{B} = B(\cos\theta\,\hat{z} + \sin\theta\,\hat{x})$

$d\mathbb{F} = I\,d\ell \times \mathbb{B}$

$d\ell = a\,d\varphi\,\hat{\varphi}$

$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$



したがって $d\mathbb{F} = d\varphi\, IaB(-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}) \times (\cos\theta\,\hat{z} + \sin\theta\,\hat{x})$

$= d\varphi\, IaB(\sin\varphi\cos\theta\,\hat{y} + \cos\varphi\cos\theta\,\hat{x} - \cos\varphi\sin\theta\,\hat{z})$

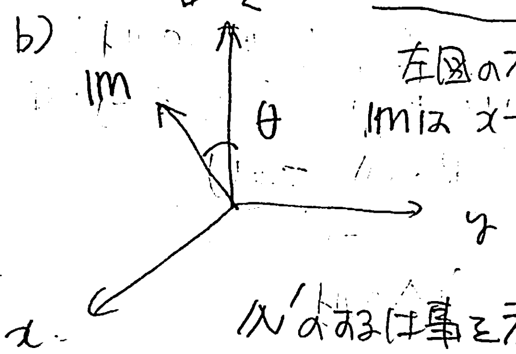
$\int d\mathbb{F} = \int d\varphi \cdots = 0$

$\mathbb{N} = \int d\mathbb{N} = \int \underbrace{a(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y})}_{\text{原点からリング上の点までのベクトル}} \times d\mathbb{F} = Ia^2B\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\cdots \cos^2\varphi\sin\theta\,\hat{y}\right]$

$= \underbrace{I(\pi a^2)}_{|\mathbb{m}|}B\sin\theta\,\hat{y}$

$= \mathbb{m} \times \mathbb{B}$ 磁場に沿うように働いている。

b)



左図の様に磁場の方向にz軸をとり直す

$\mathbb{m}$は xz平面内にあるとすると、$\mathbb{m}$に働くトルクは

$\mathbb{N} = \mathbb{m} \times \mathbb{B} = mB\sin\theta\,(-\hat{y})$

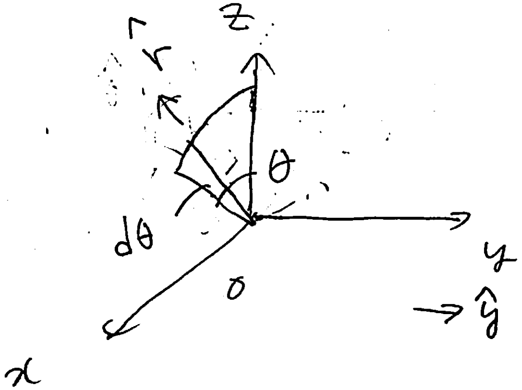
これに逆らうトルクは $\mathbb{N}' = -\mathbb{N}$

$\mathbb{N}'$のする仕事を考えて $U = -\int_{\pi/2}^{\theta} \hat{y}\,d\theta \cdot \mathbb{N}' = -mB\cos\theta = -\mathbb{m}\cdot\mathbb{B}$

note

・質点をある軸のまわりに角度 $d\theta$ だけ回転させた時に外力 $\mathbb{F}$ のする仕事は、

$$dU = \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$



例えば y軸を回転軸にとると

$$d\mathbb{r} = r\,d\theta\,(\hat{y} \times \hat{r})$$

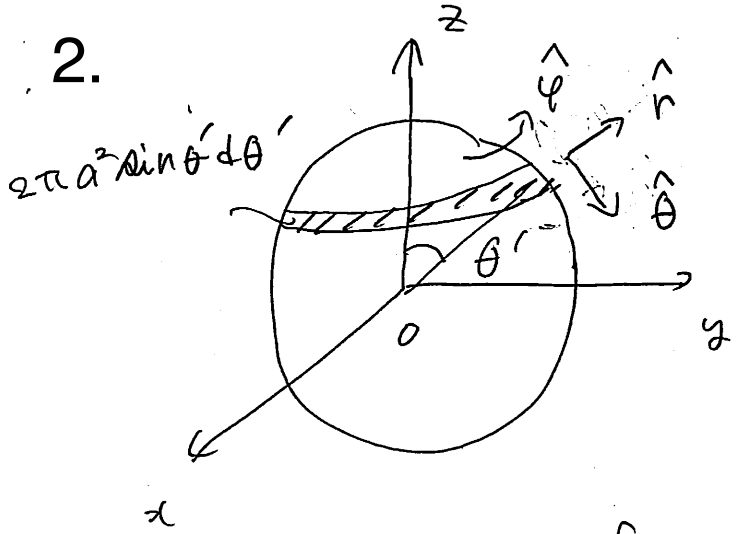
従って

$$dU = \mathbb{F} \cdot (\hat{y} \times \mathbb{r})\,d\theta \qquad \mathbb{r} = r\hat{r}$$

$$= \hat{y}\,d\theta \cdot \underbrace{(\mathbb{r} \times \mathbb{F})}_{N}$$

力のトルク

2.



表面上の点 $(a\cos\theta', a\sin\theta'\cos\varphi', a\sin\theta'\sin\varphi')$

その表面磁化電流は、

$$\mathbb{K} = -\hat{r} \times M\hat{z} = M\sin\theta'\hat{\varphi}'$$

$\hat{r}$：原点から球殻方向への単位ベクトル

$$\mathbb{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\text{球殻上}} dS \, \frac{M\sin\theta'(\hat{\varphi}'\times\mathbb{R})}{R^3}$$

$\mathbb{R}$：球殻上の点から $z\hat{z}$ までのベクトル

$$\mathbb{R} = z\hat{z} - a\hat{r}'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\pi d\theta' \, 2\pi a^2 \sin\theta' \, \frac{M\sin\theta'(\hat{\varphi}'\times\mathbb{R})}{R^3}$$

$$R = (z^2 + a^2 - 2za\cos\theta')^{1/2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\pi a^3 M\hat{z} \times \int_0^\pi d\theta' \frac{(\sin\theta')^3}{(z^2+a^2-2za\cos\theta')^{3/2}}$$

$$\hat{\varphi}\times\mathbb{R} = z(\hat{\varphi}'\times\hat{z}) - a\underbrace{(\hat{\varphi}'\times\hat{r}')}_{-\hat{\theta}'}$$

$$\hat{\theta}' = \sin\theta'\hat{z} + \cos\theta'\cos\varphi'\hat{x} + \cos\theta'\sin\varphi'\hat{y}$$

$t = \cos\theta$

$$= \frac{\mu_0}{2}a^3 M\hat{z}\int_{-1}^{1} dt \, \frac{1-t^2}{(z^2+a^2-2zat)^{3/2}}$$

左の結果から

1) $z=0$では

$$\mathbb{B}(0) = \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{z}$$

2) $|z| \gg a$では

$$\mathbb{B}(z) \simeq \frac{2\mu_0 M a^3}{3z^3}\hat{z}$$