no10 略解

0.

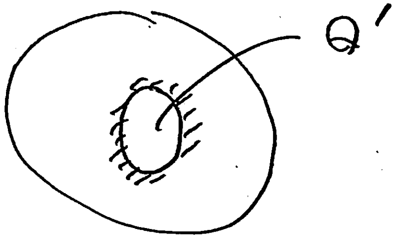
(1) 導体内では電場は0でなければならない。

$$\rho = \epsilon_0 \nabla\cdot E = 0 \rightarrow \int dV \rho = 0 \cdots (\#)$$

これが導体内の任意の閉領域Vについて成り立つ。したがって電荷は表面にのみ分布

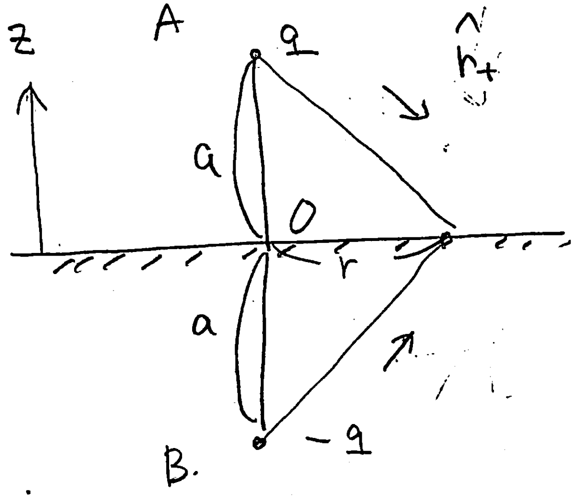
(2) 変化しない。内側の表面(空洞のまわりの壁)に電荷が存在することもない。理由は(1)と同じ議論。

(3)



導体内に含まれ、かつ空洞を含む領域Vを考えると(#)が成り立つためにはQ'を打ち消す$-Q'$の電荷が必要。一方、(1)と同様導体内部に電荷は存在できないのでこれは内側の表面に分布する。
一方、外側の表面には、合わせて、$Q+Q'$の電荷が分布する。

1.



導体表面 $(z=0)$ で

$$-\nabla\phi\Big|_z \propto \hat{z} \quad \cdots (\text{A})$$

でなければならない。

図のように A, B に $q, -q$ の電荷を置いた場合を仮想的に考えると（導体は取り除いた真空）図のように原点 O をとって

$$\mathbb{E}(x, y, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2+a^2}(\hat{r}_+ - \hat{r}_-)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\hat{r}_+ = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\, r\hat{r} \mp \frac{a\hat{z}}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

$$\hat{r} \to \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$$

$$= -2\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}\hat{z}$$

となり、(A) をみたす。

誘導電荷は
$$\sigma(r) = \epsilon_0\left(\mathbb{E}(x, y, 0)\cdot\hat{z}\right)$$
$$= -\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

総量をもとめると

$$\int_0^\infty dr\, 2\pi r\,\sigma(r) = -q\underbrace{\int_0^\infty dr\frac{ar}{(r^2+a^2)^{3/2}}}_{1} = -q$$

2.

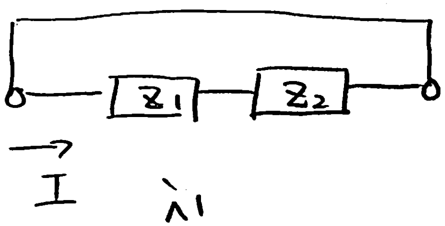
(a) 各結合部分で電荷がたまらないとすると、電荷の保存則から、結合部分に流れ込む電流の和は0である。 $(0 = \partial_t \rho = -\nabla\cdot J)$

→ キルヒホッフの第1法則

磁場がない所では $\nabla\times E = -\partial B/\partial t = 0$ したがって素子をつなぐ結合部分を結ぶ任意の閉じた経路(素子の中は通らない)について

$\oint dl\cdot E = 0$ つまり各素子の両端の電位差を閉じたループに沿って足しあげた結果は0になる. → キルヒホッフの第2法則

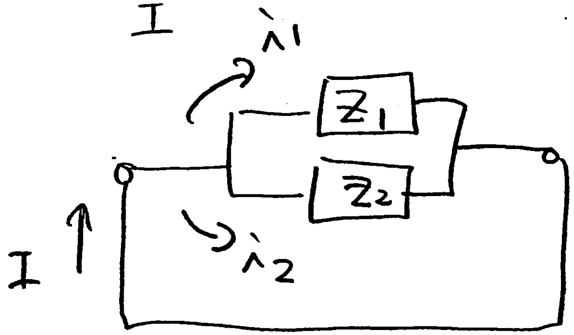
(b)



$IZ_1 + IZ_2 = 0$ (第2法則より)

図の2つの白丸間の電位差は $Z_p = Z_1 + Z_2$ の素子が1つあるのと同じ

(c)



$I = i_1 + i_2$ (第1法則)

$Z_1 i_1 - Z_2 i_2 = 0$ (第2法則)

これを解いて

$i_1 = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} I \quad i_2 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} I$

これから、図の2つの白丸間の電位差は

$Z_p = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}$ の素子が1つあるのと同じ。

3.

(1)
$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = I \\ L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{Q}{C} = 0 \end{cases} \rightarrow L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C}$$

一般解は

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$$
$$\omega = 1/\sqrt{LC}$$

初期条件をみたすために、

$$\begin{cases} q_0 = Q_0 \cos(\phi) \\ 0 = -\omega Q_0 \sin(\phi) \end{cases}$$

これから、 $\phi = 0$ $Q_0 = q_0$ $\therefore Q = q_0 \cos(\omega t)$

(2)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u \\ m\dfrac{du}{dt} + kx = 0 \end{cases}$$

対応関係は、

質量 m $\longleftrightarrow$ インダクタンス L

変位 x $\longleftrightarrow$ 電荷 Q

速さ u $\longleftrightarrow$ 電流 I

ばね定数 k $\longleftrightarrow$ 静電容量の逆数 $1/C$.

つまり、質点とコイル、ばねとコンデンサーが対応している。