ベクトルと行列 1 (担当 松下勝義)

1-VI. 逆行列の計算

1-VI-0. 逆行列と連立 1 次方程式 (p. 79)

連立一次方程式,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_1 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_1 \end{cases} \tag{1}$$

の解を求める方法として, 逆行列を考えることができる. 逆行列とは, 行列,

$$\left(\hat{A}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

に対して

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \tag{3}$$

となる行列 $\hat{A}^{-1}$ のことで, $\hat{I}$ は単位行列である. この行列 $\hat{A}^{-1}$ を連立一次方程式の左辺にかけると,

$$\hat{A}^{-1}(\hat{A}\boldsymbol{x}) = (\hat{A}^{-1}\hat{A})\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \tag{4}$$

となり, 右辺は

$$\hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{5}$$

となるので, 解を,

$$\boldsymbol{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{6}$$

と書くことができる.

この逆行列は通常連立一次方程式を解く際には用いられない. 理由は計算量が掃き出し法や LU 分解 (p. 79), 共役勾配法などの近似法より多いことや, 必ず逆行列が存在するとは限らない点などが挙げられる. ただし $\hat{A}$ に対して, $\hat{A}^{-1}$ が存在するときにいろいろな応用例があるためこの授業では逆行列の計算法とそれによる連立一次方程式を解くことを扱う.

1-VI-1. 逆行列と行列の正則性

- **正方行列**

　まず逆行列が存在するためには正方行列でなければならない．前にも述べたが $\hat{A}$ の行の数と列の数が同じであるとき，この行列を**正方行列**と呼ぶ．

正方行列

n 行 m 列行列 $\hat{A}$ に対して，

$$n = m \tag{7}$$

ならば $\hat{A}$ は正方行列であるという．またこのときの n を正方行列の次数と呼び，$\hat{A}$ を n 次正方行列とも呼ぶ．

ここからは正方行列に限って議論する．

- **逆行列**

　もし $\hat{A}$ が n 次正方行列で，もう一つ n 次の正方行列 $\hat{A}^{-1}$ が以下の性質を満たすとする．

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \tag{8}$$

ここで $\hat{I}$ は正方行列 $\hat{A}$ の次数が一致する単位行列である．逆行列 $\hat{A}^{-1}$ は単位行列を 1 と見做したときの普通の数の逆数に対応する．そのため逆行列と呼ぶ．

逆行列

$\hat{A}^{-1}$ が正方行列 $\hat{A}$ の逆行列あるとは，

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \tag{9}$$

が成立する行列の事である．

- **正則行列**

もし $\hat{A}$ に逆行列が存在したときその行列は正則であるという．

正則行列

正方行列 $\hat{A}$ が逆行列 $\hat{A}^{-1}$ を持つとき，$\hat{A}$ は正則であると言い，$\hat{A}$ のことを正則行列と呼ぶ．

1-VI-2 逆行列の基本行列による表現

演習で行基本変形が行列でかけることを見た. 例として, 行基本変形は 2 行 2 列の範囲では

- 1 行目と 2 行目を入れ替える,

$$\hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

- 1 行目を n 倍する

$$\hat{P}_1(n) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

- 2 行目を k 倍を 1 行目に足す

$$\hat{P}_{21}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

などのように書ける.

与えられた行列 $\hat{A}$ に対して, その階段行列 $\hat{E}_A$ をつくる行基本変形を $\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n$ と書くとき, これまで連立一次方程式の解法で見てきたように解が一意に決まる場合は $\hat{E}_A = \hat{I}$ でなければならない. このとき

$$\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n\hat{A} = \hat{I} \tag{13}$$

となる. 先ほど述べた通り, 逆行列は

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \tag{14}$$

を満たすため, （厳密には一意性が必要だが） 以下のように見なしてよい

逆行列の行基本変形の行列による表現

ある正則行列 $\hat{A}$ に対して, その正則行列は行基本変形で

$$\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n\hat{A} = \hat{I} \tag{15}$$

と階段行列である単位行列へ変形できる. このとき,

$$\hat{A}^{-1} = \hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n\hat{I} \tag{16}$$

と逆行列を表現できる.

ここで一番右の単位行列は必要ではないが, のちの逆行列の求め方の説明の都合上付けておく.

例として以下の演習問題の行列を考える.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

この行列に対して演習問題の解答から

$$\hat{P}_{21}(-3)\hat{P}_2(-1/3)\hat{P}_{12}(-2)\hat{P}_{12}\hat{A} = \hat{I} \tag{18}$$

が成り立つが, これは逆行列が

$$\begin{aligned} \hat{A}^{-1} &= \hat{P}_{21}(-3)\hat{P}_2(-1/3)\hat{P}_{12}(-2)\hat{P}_{12}\hat{I} && (19) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && (20) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} && (21) \end{aligned}$$

と計算できる. 実際に $\hat{A}$ に左からかけてみると,

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

となる.

1-VI-3 逆行列の計算法

逆行列が行基本変形を単位行列に施して得られることが分かった. つまり, 行列をかけなくとも, 行基本変形により逆行列を得ることができる. これは以下のように行列 $\hat{A}$ と単位行列 $\hat{I}$ に同時に行基本変形を行う事で実行できる.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{I} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) && (23) \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) && (24) \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right) && (25) \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) && (26) \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) && (27) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \hat{I} & \hat{A}^{-1} \end{array} \right) && (28) \end{aligned}$$

と左の行列を行基本変形で階段行列へ変形すると右に逆行列ができる.

正則性の確認と逆行列の計算法

正方行列 $\hat{A}$ が正則であるかは以下の手順で判定できる.

1. 行列 $\hat{A}$ と単位行列 $\hat{I}$ を以下のように並べる.

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{I} \end{array} \right) \tag{29}$$

2. 二つの行列を共に同じ行基本変形で変形し $\hat{A}$ を階段行列 (単位行列)$\hat{B}$ にする.

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{I} \end{array} \right) \overset{\text{行基本変形}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{c|c} \hat{E}_A & \hat{C} \end{array} \right) \tag{30}$$

3. $\hat{E}_A$ が単位行列であれば, $\hat{C}$ は逆行列 $\hat{A}^{-1}$ になる. そうでなければ逆行列は存在しない.

$$\begin{cases} \hat{E}_A = \hat{I} & \Rightarrow \hat{A}^{-1} = \hat{C} \\ \hat{E}_A \neq \hat{I} & \Rightarrow \hat{A}^{-1}\text{は存在しない} \end{cases} \tag{31}$$

以上の手続きを通して同時に $\hat{A}^{-1}$ が $\hat{C}$ から得られる.

1-VI-4 逆行列の性質

- **逆行列の一意性**

もし別に正則行列 $\hat{A}$ に対して逆行列 $\hat{B}$ が $\hat{A}^{-1}$ 以外に存在するとする. このとき,

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{I} \tag{32}$$

が成立するので, 右から $\hat{A}^{-1}$ をかけると

$$\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{I} = \hat{A}^{-1}(\hat{A}\hat{B}) = (\hat{A}^{-1}\hat{A})\hat{B} = \hat{I}\hat{B} = \hat{B} \tag{33}$$

となる. 従って $\hat{B}$ は逆行列 $\hat{A}^{-1}$ でなければならない.