ベクトルと行列1 (担当 松下勝義)

演習問題 1-I (平面ベクトルと空間ベクトル)

- **演習問題 1-I-a**
  次の二つの空間ベクトルに対して,
  $$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$
  としたとき,
  - **(1)** $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のそれぞれの長さを計算せよ.
  - **(2)** $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を計算せよ.
  - **(3)** $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積を計算し, 図示せよ.
  - **(4)** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ の内積を計算せよ. (ヒント:$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ を使う.)
  - **(5)** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ の外積を計算せよ. (ヒント:$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ を使う.)
  - **(6)** $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の成す角を求めよ.
  - **(7)** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ の成す平行六面体の体積を求めよ.

- **演習問題 1-I-b.**
  空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とその成す角を θ とする. そのとき余弦定理
  $$\boldsymbol{c}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$
  が成立する. ただし, $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る三角形のもう一つの辺のベクトル $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ である. この定理を使って
  $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$
  と書けることを示せ.

- **演習問題 1-I-c**

空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ||a|| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} ||b|| \cos\theta \\ ||b|| \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

とする. このとき, 外積

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

の大きさが

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$$

と書け, θ が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角であることを示せ. ただし演習問題 1-2 の公式 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$ を使ってよい.

- **演習問題 1-I-d**

ベクトル三重積の内積を用いて表した公式

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{22}$$

をその第一成分に対して示せ.