# 線形代数 II 第一回 (担当 松下勝義)

## 5-0. 行列とベクトル (10 分, p.78)

連立一次方程式,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

の解を $\boldsymbol{a}$ としたとき,

$$\hat{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2}$$

と書けば, これは $\boldsymbol{a}$ に行列 $\hat{A}$ をかけたとき $\boldsymbol{b}$ に変化するとみなせる. このような変化を線形変換と呼ぶ.

例えば

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

はベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

をそれぞれ

$$\hat{A}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\hat{A}\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

のように 90 度回転させる.

線形変換は物体の軌道やグラフィックスにおいて視点を変えそれらを作図するのに有用な概念で, 例えば回転などは線形変換としてあらわされる. そして線形変換は行列のもう一つの見方である.

後期の授業ではこの線形変換のベクトルのなす空間 ” ベクトル空間 ” での表現方法を理解することを目標に進める. 最終的にはこれらの行列に対応する線形変換は行列の固有値と固有ベクトルで特徴づける.

## 5-1. 平面ベクトル (10 分, p.78)

1. 回転変換と空間ベクトル, スカラーの直観的な概念

2. 平面ベクトルの定義 (例示)

$$A = (1, 1), \quad B = (2, 3) \tag{9}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2) \tag{10}$$

3. 平面ベクトルの同値 (例示)

$$C = (2, 1), \quad B = (3, 3) \tag{11}$$

$$\overrightarrow{CD} = (3, 3) - (2, 1) = (1, 1) = \overrightarrow{AB} \tag{12}$$

4. 位置ベクトルの定義 (例示)

$$O : (0, 0) \tag{13}$$

$$A : (1, 1), \quad B : (2, 3) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = (1, 1) - (0, 0) = (1, 1) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} = (2, 3) - (0, 0) = (2, 3) \tag{16}$$

5. 成分の定義 (例示)

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) = (1, 1) \tag{17}$$

$$a_1 = 1 \tag{18}$$

$$a_2 = 1 \tag{19}$$

6. ベクトルの和とスカラー倍 (図 5.3)

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (1, 1) + (2, 3) = (3, 4) \tag{20}$$

$$2\boldsymbol{a} = 2 \times (1, 1) = (2, 2) \tag{21}$$

7. 零ベクトル

$$\mathbf{0} = (0, 0) \tag{22}$$

## 5-2. 空間ベクトル (5 分, p.82)

1. 平面と空間の成分数の違い (例示)

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0) \tag{23}$$

## 5-3. ベクトルの内積 (30 分, p.85)

1. 平面, 空間ベクトルの内積の定義 (例示)

$$\boldsymbol{a} = (1, 1), \quad \boldsymbol{b} = (2, 3) \tag{24}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1 \times 2 + 1 \times 3 = 5 \tag{25}$$

2. 内積の性質 (教科書 p.85 の該当箇所のみ)

3. ベクトルの長さ (例示)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = ||a||^2 \tag{26}$$

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{1 \times 1 + 1 \times 1} = \sqrt{2} \tag{27}$$

4. 単位ベクトル

$$\boldsymbol{e_a} = \frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \tag{28}$$

5. 余弦定理からの内積の計算 (簡単な例示, 教科書 p. 85, 演習問題 A-2)

$$\boldsymbol{a} = (1, 1), \boldsymbol{f} = (1, 0) \tag{29}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}) = 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1 \tag{30}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}) = \sqrt{2} \times 1 \cos(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \tag{31}$$

$$\boldsymbol{a} = (||a|| \cos\theta, ||a|| \sin\theta), \quad \boldsymbol{f} = (||b||, 0) \tag{32}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}) = ||a|| \cos\theta \times ||b|| + ||a|| \sin\theta \times 0 = ||a||||b|| \cos\theta \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

6. 内積とベクトルの直交 (例示)

$$\boldsymbol{a} = (1, 1), \quad \boldsymbol{g} = (1, -1) \tag{35}$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{g}) = 1 \times 1 + 1 \times -1 = 0 \sim \cos\frac{\pi}{2} \tag{36}$$

## 5-4. ベクトルの外積 (35 分, p.88)

1. 空間ベクトルの外積の定義 (例示)

$$\boldsymbol{a} = (1,1,0), \quad \boldsymbol{b} = (2,3,1) \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) &(38)\\ &= (1\times 1 - 0\times 3, 0\times 2 - 1\times 1, 1\times 3 - 2\times 2) &(39)\\ &= (1,-1,-1) &(40)\end{aligned}$$

2. 平面の面積と行列式 (p.87) と外積の大きさ

$$\boldsymbol{a} = (1,1,0), \quad \boldsymbol{f} = (1,0,0) \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{f} &= (1\times 0 - 0\times 0, 0\times 1 - 1\times 0, 1\times 0 - 1\times 1) &(42)\\ &= (0,0,-1) &(43)\end{aligned}$$

$$||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{f}|| = 1 \tag{44}$$

$$||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{f}|| = ||a||||f||\sin\theta = \sqrt{2}\times 1\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \tag{45}$$

3. 外積の中の交換

$$\boldsymbol{f} = (1,0,0), \quad \boldsymbol{a} = (1,1,0) \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{a} &= (0\times 0 - 0\times 1, 0\times 1 - 1\times 0, 1\times 1 - 0\times 1) &(47)\\ &= (0,0,1) = -\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{a} &(48)\\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) &(49)\\ &= (-(b_2a_3 - b_3a_2), -(b_3a_1 - b_1a_3), -(b_1a_2 - b_2a_1)) &(50)\\ &= -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} &(51)\end{aligned}$$

4. 同じベクトルの外積

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0 \tag{52}$$

5. 結合律の欠如

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{f}) &= (1,1,0)\times(0,0,-1)\\ &= (1\times -1 - 0\times 0, 1\times -1 - 0\times 0, 1\times -1 - 0\times 0)\\ &= (-1,-1,-1) &(54)\end{aligned}$$

6. その他の性質 (p. 89)

7. 外積の直交性と右手系（定理 5.1, 板書でリスト, 可能であれば例示）

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \tag{55}$$

## 5-5. 三重積 (10 分)

1. スカラー三重積 (レポート問題 I-3. (4))
2. ベクトル三重積 (レポート問題 I-2.)