補足3　連立一次方程式の解き方

- 例題 2. 3 に対応する連立一次方程式,

$$\begin{cases} & 2x & -2y & +z & = & 3 \\ w & +3x & +y & +z & = & 2 \\ 3w & +5x & +7y & +2z & = & 2 \\ 2w & +4x & +4y & +2z & = & 3 \end{cases} \tag{50}$$

とその拡大係数行列 $(\hat{B}\ \boldsymbol{d})$ を考える.

$$\begin{pmatrix} \hat{B} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{51}$$

例題の回答から, 対応する階段行列 $(\hat{C}\ \boldsymbol{e})$ は,

$$\begin{pmatrix} \hat{B} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{C} & \boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

となる.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

$$\hat{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e} \tag{54}$$

行列とベクトルの掛け算の定義から

$$\begin{cases} \boxed{1} \times w & +0 \times x & +4 \times y & +0 \times z & = & -\frac{3}{2} \\ 0 \times w & +\boxed{1} \times x & +(-1) \times y & +0 \times z & = & -\frac{1}{2} \\ 0 \times w & +0 \times x & +0 \times y & +\boxed{1} \times z & = & 2 \\ 0 \times w & +0 \times x & +0 \times y & +0 \times z & = & 0 \end{cases} \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\mathrm{w}} & & +4y & & = & -\frac{3}{2} \\ & \boxed{\mathrm{x}} & -y & & = & -\frac{1}{2} \\ & & & \boxed{\mathrm{z}} & = & 2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases} \tag{56}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\mathrm{w}} & & & +4y & = & -\frac{3}{2} \\ & \boxed{\mathrm{x}} & & -y & = & -\frac{1}{2} \\ & & \boxed{\mathrm{z}} & & = & 2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases} \tag{57}$$

このときピボット未知数は $\boxed{\mathrm{w}}, \boxed{\mathrm{x}}, \boxed{\mathrm{z}}$ でピボットでない未知数は y である．そこでピボットでない未知数に関して

$$y = c \tag{58}$$

とする．結果的に，

$$\begin{cases} \boxed{\mathrm{w}} & & & & = & -\frac{3}{2} - 4c \\ & \boxed{\mathrm{x}} & & & = & -\frac{1}{2} + c \\ & & \boxed{\mathrm{z}} & & = & 2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases} \tag{59}$$