線形代数 I (担当 松下勝義)

教科書 §2.3-2.4, pp.13–26

II. 行列の階数と階段行列, 連立方程式の解

講義ノート

連立一次方程式は解が一意に定まるとは限らない．場合によっては解が ∞ 個ある場合や, 解がない場合が存在する．これらの場合でも係数行列 $\hat{A}$ は階段行列に行基本変形で変形できる．そしてそれを利用し解を求めることができる．今回はこれらの場合の行列による解法を述べる．

- 階段行列次のような行列を階段行列と呼ぶ．ピボットという値が 1 の成分が存在しそれが以下の条件を満たす．
  1. ピボットがない行のすべての成分は 0
  2. ピボットより左にある成分はすべて 0
  3. ピボットのある列の列番号を p_i としピボットを含む行の数を r ($< m$ で m は行列の行の数) とすると
     $$p_1 < p_2 < \cdots < p_{r-1} < p_r. \tag{67}$$
     そして各ピボットを含む列ベクトルの成分はピボット以外で 0.
- 基本変形による階段行列への変形と階数
  行列 $\hat{A}$ は行基本変形で階段行列 $\hat{B}$ に変形できる．このとき階段行列のピボットの数 r を $\mathrm{rank}(\hat{A})$ と書き行列の階数と呼ぶ．
- 拡大係数行列の係数行列 $\hat{A}$ の列数 n と階数 r に対して以下が成り立つ．行基本変形で係数行列が階段行列 $\hat{B}$ とベクトル $\boldsymbol{d}$ からなる拡大係数行列へ変形できたとする．
  $$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{B} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{68}$$
  - $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ ではない．$\Rightarrow$　解なし
  - $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ かつ $r{=}n$ 解が一つ存在する．
  - $d_{r+1} = \ldots\ d_n = 0$ かつ $r < n$ 解が ∞ 個あり未定定数 $n - r$ 個で書ける．

- 解が一意に定まる場合 (例題 2.4(1))
  連立一次方程式

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +4z & = & 4 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{69}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \tag{70}$$

この場合階段行列は単位行列 $\hat{I}_3$ になり, $\boldsymbol{d}$ の 0 ではない成分の数は 3, r も階数 (ピボット数) が 3 であり d_4 等はなく 0 とみなしてよい. 列の数 3 であるから解が一意であることがわかる.

- 解が無限に存在する場合 (例題 2.4(2))

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +z & = & 1 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{71}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{72}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{74}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

より $d_n \neq 0$ の数がピボットの数 $r = 2$ と一致している．また列の数 n は 3 で解が ∞ 個あり未知定数 c 一つで解が書けることが分かる．z=c とすると

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

より

$$\begin{cases} x - c = 2 \\ y + c = -1 \end{cases} \tag{79}$$

となる．よって解は

$$\begin{cases} x = 2 + c \\ y = -1 - c \\ z = c \end{cases} \tag{80}$$

である．

- 解が存在しない場合 (例題 2.4(3))

$$\begin{cases} x & -2y & -3z & = & 4 \\ 2x & +3y & +z & = & 4 \\ 3x & -4y & -7z & = & 10 \end{cases} \tag{81}$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{82}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{83}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} \tag{85}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{86}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{87}$$

より $d_n \neq 0$ の数が 3 で階数 (ピボットの数)$r = 2$ より大きい. そのため解はない. 実際解 (x, y ,z) が存在するとすると,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{88}$$

より

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = -1 \\ 0 = 3 \end{cases} \tag{89}$$

となるため最後の式が矛盾してしまう.