補足 7　行列式の性質と計算

- 行列式の計算を定義から行うのは困難．ところが, 行列のように行基本変形から容易に計算できる．それは次の二つの事実を用いる．

  1. 行列式は行基本変形で以下の様に変形される．n 次正方行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ を考える．
     (a) ある行 (i 行目とする) を定数 k 倍すると行列式は k 倍される．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{155}$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{156}$$

に対して 1 行目を 2 倍した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{157}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2|\hat{A}| \tag{158}$$

実際, $|\hat{A}'| = 2$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている．

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{159}$$

に対して 2 行目を 2 倍した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{160}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = 2|\hat{A}| \tag{161}$$

実際, $|\hat{A}'| = -6$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている．

(b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \dots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{162}$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{163}$$

に対して 2 行目を 2 倍した行を 1 行目に足した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{164}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |\hat{A}| + 2 \times 0 = |\hat{A}| \tag{165}$$

実際, $|\hat{A}'| = 1$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{166}$$

に対して 2 行目を 2 倍したものを 1 行目に足した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{167}$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = |\hat{A}| \tag{168}$$

実際, $|\hat{A}'| = -3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{169}$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{170}$$

に対して 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{171}$$

の行列式を考えると，

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -|\hat{A}| \tag{172}$$

実際, $|\hat{A}'| = -1$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている．

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{173}$$

に対して 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{174}$$

の行列式を考えると，

$$|\hat{A}'| = -|\hat{A}| \tag{175}$$

実際, $|\hat{A}'| = 3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている．

2. 第一列の成分で 0 出ないものが a_{11} のみの時 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{176}$$

$\hat{A}$ の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}|\hat{C}| \end{aligned} \tag{177}$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{178}$$

- 例 2 次の正方行列

  $$\hat{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{179}$$

  に対して 1 次小さい行列

  $$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \tag{180}$$

  との対応を考えると,

  $$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times |\hat{C}| = 1 \tag{181}$$

  実際,
- 例 3 次の正方行列

  $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{182}$$

  に対して 1 次小さい行列

  $$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{183}$$

の行列式との対応を考えると,

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times |\hat{C}| = -3 \tag{184}$$

実際, $|\hat{C}| = -3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

3. 行列式の計算の仕方

上の二つを用いると, 以下の手順で計算できる.

(a) 行基本変形で行列式を式 (176) の形にする.

(b) (177) を使って行列式の次数を一つ減らす

これを行列式の次数が 1 になるまで繰り返す.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{185}$$

に対して,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} -3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times -3 = -3 \end{aligned} \tag{186}$$

– 例 4 次の正方行列

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -1 & 11 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times -1 \times \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times -1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times -1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times -1 \times 4 \times 4 \times |8| = 1 \times -1 \times 4 \times 4 \times 8 \\ &= -128 \end{aligned} \tag{187}$$

– 三角行列 $\hat{A}$ の行列式は

$$
|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{188}
$$

は先の計算を繰り返すと，

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{23} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} & \\ 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} & \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} & \end{vmatrix} \\
&\qquad \vdots \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{n-1n-1} a_{nn} \\
&= \prod_i a_{ii}
\end{aligned} \tag{189}
$$

となる．

- 行列式の行基本変形の証明

1. (a) ある行を定数 k 倍すると行列式は k 倍される．$\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目が k 倍されている行列を $\hat{A}'$ とすると，定義より

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}'| &= \sum_{\sigma\in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots k a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= k \sum_{\sigma\in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= k|\hat{A}| \qquad (190)
\end{aligned}
$$

(b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない．この証明には (c) を用いる．まず，$\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目の k 倍した行列の行列式 $|A'|$ を考えると，

$$
\begin{aligned}
|A'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + k a_{j1} & \cdots & a_{in} + k a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma\in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \left(a_{i\sigma(i)} + k a_{j\sigma(j)}\right) \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\quad + k \sum_{\sigma\in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (191)
\end{aligned}
$$

第二項では i 行目と j 行目が同じ $(a_{j1} \cdots a_{jn})$ になっている．ところが i 行目と j 行目が同じ行列式のその二つの行を入れ

替えると (c) より,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{192}$$

と 0 になることが分かる. 従って第二項を 0 と置くことで,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = |\hat{A}| \tag{193}$$

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる. $\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目が入れ替わった行列を $\hat{A}'$ とすると,

$$\begin{aligned} |\hat{A}'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned} \tag{194}$$

一方,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(j)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n))\\
&=-1\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(j)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n))\\
&=(-1)^2\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(i+2)\sigma(j)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n))\\
&=(-1)^{(j-i)}\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(i)\sigma(j)\cdots\sigma(n))\\
&=(-1)^{(j-i)}\times(-1)^{(j-i-1)}\times\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n))\\
&=-\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\sigma(i+1)\sigma(i+2)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n))
\end{aligned}
\tag{195}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}'| &= \sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(n))\\
&\times a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= -\sum_{\sigma\in P_n}\mathrm{sgn}(\sigma(1)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n))\\
&\times a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= -|\hat{A}|
\end{aligned}
\tag{196}
$$

- 第一列の成分で 0 出ないのが a_{11} のみの場合の証明

1. 次のような行列式 $|\hat{A}|$ を考える．

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \tag{197}$$

この行列式は必ず定義の数ある項の中で一行目から a_{11} を選ぶ項のみが 0 でない．そのような a_{11} を含む項はすでに 1 行目から成分を選んでいるため b_{1i} のいずれかの成分を含めない．従って

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n)) a_{11} c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \tag{198}$$

ここで $\mathrm{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ は最初の 1 が固定されているため, $\mathrm{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n))$ と実質同じになる．　結果として,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= a_{11} \sum_{\sigma \in P_n} \mathrm{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n)) c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} |\hat{C}| \end{aligned} \tag{199}$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{200}$$