補足 2　ベクトルと行列

補足 2.1　ベクトル

- m 次数の行ベクトル (row vector)$\boldsymbol{x}^T$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \end{pmatrix} \tag{8}$$

  - 例: 3 次数の列ベクトル $\boldsymbol{a}^T$

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

- n 次数の列ベクトル (column vector)$\boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

  - 例: 3 次数の列ベクトル $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \tag{11}$$

- ベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分 x_i
  - 例: 式 (11) のベクトル $\boldsymbol{b}$ の第 2 成分

$$b_2 = -2 \tag{12}$$

- n 次数の列ベクトルの転置 $(\boldsymbol{x})^T$(transposition) 転置は列ベクトルを成分が同じ行ベクトルに変わる.

$$(\boldsymbol{x})^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^T \tag{13}$$

行ベクトルに対しても同様に成分が同じ列ベクトルへ変わる.

– 例: 式 (11) のベクトル $\boldsymbol{b}$ の転置

$$(\boldsymbol{b})^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}^T \tag{14}$$

- ベクトルの同値 (同じ) 同じ次数 n を持つ列ベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{15}$$

と $\boldsymbol{y}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{16}$$

に対して $1 \leq i \leq n$ の任意の i で

$$x_i = y_i \tag{17}$$

が成立するとき, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を同値と定義する. これを以下のようにあらわす.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{18}$$

と表す. どれか一つの i でも x_i と y_i が異なる $(x_i \neq y_i)$ 場合は

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \tag{19}$$

と表す.

– 例: : 式 (9) の行ベクトル $\boldsymbol{a}^T$ の転置 $\boldsymbol{a} =$ と式 (11) のベクトル $\boldsymbol{b}$ は全ての成分が異なるため,

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \tag{20}$$

- ベクトルの表記

  – 普通の数 (斜体): x, y, z, a, b, c

  – ベクトル (太字斜体) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$

補足 2.2　行列

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$(matrix)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{21}$$

  - 例 1: 3 行 3 列行列 §2.1 の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = -4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \tag{22}$$

  の係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{23}$$

  - 例 2: 3 行 4 列行列 §2.1 の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = -4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \tag{24}$$

  の拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \tag{25}$$

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$(matrix) の第 i 行 $\boldsymbol{a}_i^T$

$$\boldsymbol{a}_i^T = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \tag{26}$$

  - 例 係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{27}$$

  の第 2 行ベクトル

$$\boldsymbol{a}_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$(matrix) の第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{3j} \end{pmatrix} \tag{29}$$

  - 例 係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{30}$$

    の第 2 列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{31}$$

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$(matrix) の (i, j) 成分 a_{ij}
  - 例 1 係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{32}$$

    の (2,2) 成分

$$\boldsymbol{a}_{22} = 3 \tag{33}$$

  - 例 2 係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{34}$$

    の (2,3) 成分

$$\boldsymbol{a}_{23} = 1 \tag{35}$$

補足 2.3　行列とベクトルの積

- m 行 n 列行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{36}$$

と n 次数の列ベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{37}$$

の積 $\hat{A}\boldsymbol{x}$

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times x_1 + a_{12} \times x_2 + \ldots + a_{1n} \times x_n \\ a_{21} \times x_1 + a_{22} \times x_2 + \ldots + a_{2n} \times x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \times x_1 + a_{m2} \times x_2 + \ldots + a_{mn} \times x_n \end{pmatrix} \tag{38}$$

と定義する.

- 例 1 係数行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{39}$$

とベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{40}$$

の積

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times x + -2 \times y + -3 \times z \\ 2 \times x + 3 \times y + 1 \times z \\ 3 \times x + -4 \times y + -7 \times z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 1z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} \tag{41}$$

– 例 2 係数行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \tag{42}$$

とベクトル $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

の積

$$\hat{A}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + -2 \times 2 + -3 \times -1 \\ 2 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times -1 \\ 3 \times 1 + -4 \times 2 + -7 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{44}$$

- 例 3 行列を用いた方程式　$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える. ただし $\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{45}$$

とする. このとき, 式 (41) より

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 1z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} \tag{46}$$

である.　従って, $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は,

$$\begin{pmatrix} x - 2y - 3z \\ 2x + 3y + 1z \\ 3x - 4y - 7z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \tag{47}$$

ベクトルの同値の定義より,　これは §2.1 の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = -4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \tag{48}$$

と同じである.