6. Hookeの法則

松下勝義

平成 28 年 6 月 14 日

1 Quiz (3a)

図 1 のように二つの同じばね定位数 k を持つばねを直列に繋いだとき, 変位を u, ばねを引く力を f としたとき, Hooke の法則

$$f = k_D u \tag{1}$$

が経験的に成立する.　ここで k_D は直列のバネのバネ定数である. 一つのばねに対しても, Hooke の法則

$$f = ku \tag{2}$$

が成立しているとき, k_D を k で表せ.

2 Quiz (3b)

図 2 のように二つの同じばね定位数 k を持つばねを並列に繋いだとき, 変位を u, ばねを引く力を f としたとき, Hooke の法則

$$f = k_P u \tag{3}$$

が経験的に成立する.　ここで k_P は直列のバネのバネ定数である. 一つのばねに対しても, Hooke の法則

$$f = ku \tag{4}$$

が成立しているとき, k_P を k で表せ.

3 Answer (3a)

図 1 のような直列のばねに力 f をかけた状況を考える．まず, Hooke の法則から直列のばねに対して,

$$f = k_D u, \tag{5}$$

が成立する．一方, 直列につながれているバネ 1 とバネ 2 にかかる力を f_1, f_2, 変位をそれぞれ u_1, u_2 としたとき,

$$f_1 = k u_1 \tag{6}$$

$$f_2 = k u_2 \tag{7}$$

が成立する．

図 2 の状況では, 力のつり合いから,

$$f = f_1 = f_2, \tag{8}$$

と変位に対しては,

$$u = u_1 + u_2 \tag{9}$$

が成立する．

式 (5) より,

$$k_D = \frac{f}{u} \tag{10}$$

一方, (8) と (6), (7) から,

$$u_1 = u_2 = \frac{f}{k} \tag{11}$$

式 (10) へ (9) を代入し (11) を使うと,

$$k_D = \frac{f}{u} = \frac{f}{(u_1 + u_2)} = \frac{f}{\frac{2f}{k}} = \frac{k}{2} \tag{12}$$

4 Answer (3b)

図 2 のような並列のばねに力 f をかけた状況を考える．まず, Hooke の法則から並列のばねに対して,

$$f = k_P u, \tag{13}$$

が成立する．一方, 並列につながれているバネ 1 とバネ 2 にかかる力を f_1, f_2, 変位をそれぞれ u_1, u_2 としたとき,

$$f_1 = ku_1 \tag{14}$$

$$f_2 = ku_2 \tag{15}$$

が成立する．

図 2 の状況では, 力のつり合いから,

$$f = f_1 + f_2, \tag{16}$$

と変位に対しては,

$$u = u_1 = u_2 \tag{17}$$

が成立する．

式 (5) より,

$$k_P = \frac{f}{u} \tag{18}$$

一方, (8) と (14), (15) から,

$$f = f_1 + f_2 = k(u_1 + u_2) \tag{19}$$

この式に (17) を代入すれば,

$$f = k(u_1 + u_2) = 2ku \tag{20}$$

式 (18) へ (20) を使うと,

$$k_P = \frac{f}{u} = \frac{2ku}{u} = 2k \tag{21}$$

5　弾性体のつり合いの式

弾性体とは一般に力を加えて, その後かその力を 0 にしたとき, 元に戻る物質を指す. このような弾性体に力をかけたとき, もし弾性体の変形が静止していれば, その内部の力はつり合っている. そうでなければニュートンの運動方程式から弾性体は加速し, 変形を続けることになる. この節ではこの釣り合っていることを弾性体の内部の座標 x に対してどのように力のつり合いを記述すればいいかを考えたい.

そのため弾性体をバネ定数 k, 自然長 a のバネが直列につながっているものとして模型化しその力のつり合いを考察しよう. バネは N_D 個あり バネ 1 からバネ N_D と名前を付ける. バネの向きに座標軸 x をとり, それぞれのバネの位置を x_i と表す. ただし $i \in \{1 \dots N_D\}$ とする.

ばね x_1 のバネと x_{N_D} のバネの自由な二つの端に力 f をかけ, 力がつり合った状態になっている場合を考える. このとき, i 番目のバネの両端の力を $f(x_i + a/2)$ と $f(x_i - a/2)$ で表すと, 力のつり合いの式は,

$$f(x_i + a/2) - f(x_i - a/2) = 0 \tag{22}$$

である. 両辺をバネの断面積 A と自然長 a で割りが弾性体全体から見て十分小さいと考えると,

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{aA} \frac{af(x_i + a/2) - af(x_i - a/2)}{a} = \frac{\partial \frac{f(x)}{A}}{\partial x}|_{x=x_i} \tag{23}$$

ここで k が i に依存しないことからすべての i に対して同じことがいえるとすれば最後の i 依存性は無視してよい.

ここで応力 $\sigma(x) = f(x)/A$ を定義すればこのつり合いの式は単純に,

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} = 0 \tag{24}$$

これが弾性体内部で成り立つべき式である.

一般にはばねには重力等の外力 $F(x)$ もかかることになる. その力も考慮し (24) へ $F(x)$ を足した場合,

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} + F(x) = 0 \tag{25}$$

が力のつり合いを表す式となる.

6　弾性体の構成方程式としての Hooke の法則

直列のバネ定数と並列のバネ定数の数をそれぞれ N_D, N_P としたとき, 全体のバネ定数 k_E は

$$k_E = k\frac{N_P}{N_D} \tag{26}$$

となる. 一つバネの長さを l, バネの占める面積を a としたとき, つぎの E

$$E = k\frac{l}{a} \tag{27}$$

を考えると,

$$k_E = E\frac{A}{L} \tag{28}$$

と書ける. ここで $A = aN_D$ はバネの占める面積, $L = N_P l$ はバネの長さとなる. この E はヤング率と呼ばれ, 物質の材質のみによる量である. ばね定数 k_E はそのバネの面積に比例し, 長さに反比例する.

ここで Hook の法則

$$f = k_E u \tag{29}$$

に応力 $\sigma = f/A$ と歪 $\varepsilon = u/L$ という量を考え, 式の両辺を A で割ると,

$$\sigma = E\varepsilon \tag{30}$$

と書ける. これが弾性体の最も基本的な構成方程式である Hooke の法則である.

この構成方程式は変位 u を決定するのに利用される. 一次元の座標 x 上の弾性体の棒を考え, その各座標上の変位を $u(x)$ と書く. 連続な極限, $l = dx \to 0$ かつ $N_P \to \infty$, の場合,

$$\varepsilon(x) = \frac{u(x+dx) - u(x-dx)}{2dx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \tag{31}$$

となり, 物理学ではこの式と Hooke の法則と力のつり合いの式 (25) から

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x) = -F(x) \tag{32}$$

という式が得られる. ここで $F(x)$ は外から棒にかかる力で, 重力等を想定してよい. この式を解くことで各座標での変位 $u(x)$ を求めることができる.

A Appendix (3a)

$k_1 \neq k_2$ の場合も考えてみよう。この場合, (6), (7) は,

$$f_1 = k_1 u_1 \tag{33}$$
$$f_2 = k_2 u_2 \tag{34}$$

とする。

結果, (11) は変更され,

$$u_1 = \frac{f}{k_1} \tag{35}$$
$$u_2 = \frac{f}{k_2} \tag{36}$$

となる。

従って, (12) は,

$$k_D = \frac{f}{u} = \frac{f}{(u_1 + u_2)} = \frac{f}{\left(\frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2}\right)} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \tag{37}$$

となる。この結果は $k_1 = k_2 = k$ の場合, $k_D = k/2$ となるので (12) と整合している。

$k_1 - k_2 \simeq \Delta k$ が小さい場合どの程度のずれが出るかかんがえてみよう. ずれを $O(\Delta k/k)$ まで計算すると

$$\begin{aligned}
k_D &= \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} && (38)\\
&= \frac{k^2 + 2k\Delta k}{2k + \Delta k} + O(\frac{\Delta k}{k}^2) && (39)\\
&= \frac{k}{2}\left(1 + \frac{2\Delta k}{k}\right)\left(1 - \frac{\Delta k}{2k}\right) + O(\frac{\Delta k}{k}^2) && (40)\\
&= \frac{k}{2}\left(1 + \frac{3\Delta k}{2k}\right) + O(\frac{\Delta k}{k}^2) && (41)\\
&\simeq \frac{k}{2}\left(1 + \frac{3\Delta k}{2k}\right) && (42)
\end{aligned}$$

となる. もし二つのバネ定数が k に比べて小さな量 Δk ずれていたとき, バネ定数は $3\Delta k/4$ 程度ずれることが分かる.

さて, 実際のバネの Δk はどの程度だろうか？記述を書くときに考えてみてほしい. また, 並列の場合は Δk だけずれるがそれも導いてみよう.

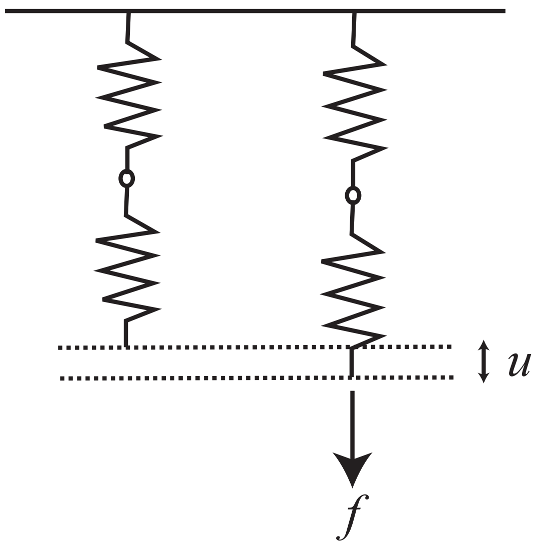

図 1:

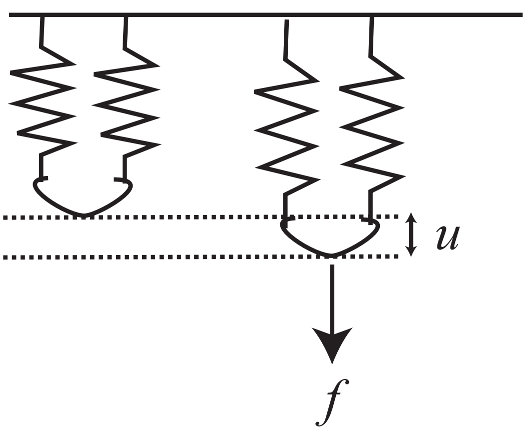

図 2: