

線形代数 I (担当 松下勝義)

VI. 行列式の解法

教科書 §4.3-4.6, pp.53-75

- 行列式の解法

まず行列式に対して一列目の一番上以外が0のときより小さい行列式に帰着される.

– $n=2$ の場合

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(12)a_{11}a_{22} + 0 \\ &= a_{11}\operatorname{sgn}(2)a_{22} \\ &= a_{11}|a_{22}| \end{aligned}$$

– 具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times |3| = 3 \quad (442)$$

実際,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(12)1 \times 3 + \operatorname{sgn}(21)2 \times 0 = 1 \times 3 = 3 \quad (443)$$

と一致する.

– 三次元の場合

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(123)a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}(132)a_{11}a_{32}a_{23} + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_{11}(\operatorname{sgn}(23)a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}(32)a_{32}a_{23}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (444)$$

– 具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (\operatorname{sgn}(12)4 \times 7 + \operatorname{sgn}(21)5 \times 6) = -2 \quad (445)$$

- 高次元でも数学的帰納法で同じことがいえる (教科書参照)
- 行列の次元低減による解法

行列の次元低減による解法

もし行列 \hat{A} の行列式の $|\hat{A}|$ の左の列ベクトルを

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (446)$$

と変形できれば

n 次元行列式 $\Rightarrow n-1$ 次元行列式 $\Rightarrow \dots \Rightarrow 2$ 次元行列式
と次元を小さくして低次元の行列式の計算にすることで計算できる.

- 式 (446) は行基本変形で変形することで実現できる.

行列式の行基本変形

1. 一つの行に 0 出ない定数 k を掛ける.
 \Rightarrow 行列式は k 倍される.

例:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (447)$$

2. 一つの行の低数倍を他の行に足す. \Rightarrow 行列式は変わらない.

例:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (448)$$

3. 行を入れ替える.
 \Rightarrow 行列式の符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \quad (449)$$

これらの行基本変形を使えば掃き出し法でやったように一列目を (446) のように変形できる.

- 行の定数倍の具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0 \quad (450)$$

実際に

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \text{sgn}(1 \ 2)1 \times 4 + \text{sgn}(2 \ 1)2 \times 2 = 4 - 4 = 0 \quad (451)$$

- 行列式の計算の例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{2}-\textcircled{1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 10 \end{vmatrix} \quad (452)$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-\textcircled{3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad (453)$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \quad (454)$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-\textcircled{1}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad (455)$$

$$\stackrel{\textcircled{2}/2}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (456)$$

$$\stackrel{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad (457)$$

$$\stackrel{\textcircled{2}-4\textcircled{1}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (458)$$

$$= 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (459)$$

- 行列式の積

— 行列式の積 —

次元が同じ正方行列 \hat{A} と \hat{B} の行列式の積にたいして,

$$|\hat{A}\hat{B}| = |\hat{A}||\hat{B}| \quad (460)$$

- 行列式と列基本変形行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (461)$$

の転置したもの

$$\hat{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (462)$$

を転置行列と呼ぶ。このとき

転置行列の行列式

$$|\hat{A}| = |\hat{A}^t| \quad (463)$$

従って次のことがいえる。

行列式の列基本変形

列に対する基本変形を行っても行基本変形と同じことが成立する。

- 余因子展開

多重線形性を考えるとある行を次のように分解できる。

余因子展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j a_{ij} (-1)^{(i+j)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (464)$$

余因子展開の例を挙げると、

- n=2 の場合,
多重線形性から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (465)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \quad (466)$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} + (-1)a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} \quad (467)$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} \quad (468)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \quad (469)$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \quad (470)$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \quad (471)$$

$$= a_{22}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} + (-1)a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \end{vmatrix} \quad (472)$$

$$= (-1)^{2+2}a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \end{vmatrix} \quad (473)$$

– n=3 の場合,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (474)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (475)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (476)$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (477)$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (478)$$

などと展開できる.

余因子

余因子展開を

$$|\hat{A}| = \sum_j a_{ij} \tilde{a}_{ij} \quad (479)$$

と書いたとき, n-1 行 n-1 列行列の行列式 \tilde{a}_{ij}

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{(i+j)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (480)$$

を余因子と呼ぶ.

余因子に対して以下の性質がある.

余因子の性質

行列 \hat{A} の i 行目の余因子を列に並べたベクトル

$$\tilde{\mathbf{a}}_i = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{i1} \\ \tilde{a}_{i2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{in} \end{pmatrix} \quad (481)$$

に対して j 行ベクトル \mathbf{a}_j を考えると

$$\left\{ \begin{array}{l} i = j \quad \mathbf{a}_j \tilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{a}}_i = \sum_k a_{ik} \tilde{a}_{ik} = |\hat{A}| \\ i \neq j \quad \mathbf{a}_j \tilde{\mathbf{a}}_i = \sum_k a_{jk} \tilde{a}_{ik} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{array} = 0 \quad (482)$$

従って、余因子行列 $\hat{\hat{A}}$

$$\hat{\hat{A}} = (\tilde{\mathbf{a}}_1 \quad \tilde{\mathbf{a}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{a}}_n) \quad (483)$$

を考えると、

$$\hat{A} \hat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} |\hat{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\hat{A}| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |\hat{A}| \end{pmatrix} = |\hat{A}| \hat{I}_n \quad (484)$$

となる。そのため次の逆行列の公式 (Cramer's rule) が成り立つ。

逆行列の公式

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\hat{A}}}{|\hat{A}|} \quad (485)$$