線形代数 I (担当 松下勝義)

V. 行列式の定義と性質

教科書 §4.1-4.3, pp.47–59

講義ノート

- ある n 次正方行列 $\hat{A}$
  の行列式 $|\hat{A}|$ と余因子行列 $\hat{\tilde{A}}$ を用いて

$$\hat{\tilde{A}}\hat{A} = |\hat{A}|\hat{I}_n \tag{267}$$

  と書ける (定理 4.13) ある**数**である．行列でもベクトルでもない．もし，行列式が 0 出なければ，逆行列は

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\tilde{A}}}{|\hat{A}|} \tag{268}$$

  と書ける．従ってもし行列式

$$|\hat{A}| = 0 \tag{269}$$

  ならば逆行列が存在しない．

  このことからわかるのは係数行列の行列式 $|\hat{A}| \neq 0$ ならば連立一次方程式に解が存在する

  行列式

  連立一次方程式 $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在する
  $\Updownarrow$
  係数行列 $\hat{A}$ が正則
  $\Updownarrow$
  行列式 $|\hat{A}| \neq 0$.

- 行列式の応用
  行列式は使いこなせないと授業についていけません．
  - ベクトルの一次独立性の判定 (後期の線形代数の授業)
  - 積分の変数変換のヤコビアン (解析学の授業)
  - 定係数微分方程式の解のロンスキアンによる表示 (微分方程式の授業)

– 複数のベクトルが表す図形の体積の計算 (この授業でふれるかも).

- 行列式の例

  – 二次元行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{270}$$

の行列式 $|\hat{A}|$ を次で定義する.

$$|\hat{A}| = \sum_{(\sigma_1\ \sigma_2)} \mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \tag{271}$$

$$= \mathrm{sgn}(1\ 2) a_{11} a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1) a_{12} a_{21} \tag{272}$$

ここで, $\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)$ は順列 $(\sigma_1\ \sigma_2)$ の符号である.

* 順列
  (1 2) や (2 1) などの 1 からある数 n(ここでは 2) までの数字を順番に並べたもの.
  · (1 2) では $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$.
  · (2 1) では $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$.

* 順列の符号
  順列 $(\sigma_1\ \sigma_2)$ に対して符号 $\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)$ は i ¡ j のときに $\sigma_i > \sigma_j$ となっている i と j のペアの数 (転位数) が偶数の時

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) = 1 \tag{273}$$

  ペアの数 (転位数) が奇数の時

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) = -1 \tag{274}$$

  とする.

* 式 (272) の中にある順列.
  · (1 2) の符号
  $i = 1 < j = 2$ ならば $\sigma_1 = 1 < \sigma_2 = 2$ であり, 転位数は 0 で偶数である. 従って, 順列 (1 2) の符号 sgn(1 2) は

$$\mathrm{sgn}(1\ 2) = 1 \tag{275}$$

· (2 1) の符号
一方で, 順列 (2 1) は $i = 1 < j = 2$ ならば $\sigma_1 = 2 > \sigma_2 = 1$ であり, 転位数は 1 で奇数である. 従って, 順列 (2 1) の符号 sgn(2 1) は

$$\mathrm{sgn}(2, 1) = -1 \tag{276}$$

∗ 式 (272) は上記の順列の符号を使うと

$$\begin{aligned} |A| &= \mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21} \\ &= 1 \times a_{11}a_{22} + (-1) \times a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

∗ 具体的な行列式の値

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{277}$$

の行列式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2) \times 2 \times 4 + \mathrm{sgn}(2\ 1) \times 3 \times 1 \\ &= 1 \times 2 \times 4 + (-1) \times 3 \times 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

– 三次元二次元と同様に定義する．3 次元正方行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{278}$$

の行列式は

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{279}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3)} \mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} a_{3\sigma_3} \\ &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) a_{11} a_{22} a_{33} \\ &+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2) a_{11} a_{23} a_{32} \\ &+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1) a_{12} a_{23} a_{31} \\ &+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3) a_{12} a_{21} a_{33} \\ &+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2) a_{13} a_{21} a_{32} \\ &+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1) a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned} \tag{280}$$

∗ 三次元での順列の符号

- (1 2 3)
  明白は転位数は 0. 従って $\mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$.
- (1 3 2)
  $i = 2 < j = 3$ で $\sigma_2 = 3 > \sigma_1 = 2$ より転位数は 1. 従って $\mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$.
- 他の順列も同様に転位数から符号が定まる.

∗ 式 (280)

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}| &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1)a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3)a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2)a_{13}a_{21}a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1)a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= 1 \times a_{11}a_{22}a_{33} \\
&+ (-1) \times a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ 1 \times a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ (-1) \times a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ 1 \times a_{13}a_{21}a_{32} \\
&+ (-1) \times) a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (281) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (282) \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (283) \\
&+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (284)
\end{aligned}
$$

$*$ 具体的な行列式行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{285}$$

の行列式は

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) \times 1 \times 1 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2) \times 1 \times 0 \times 0 \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1) \times 2 \times 0 \times 1 \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3) \times 2 \times -2 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2) \times -1 \times -2 \times 0 \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1) \times -1 \times 1 \times 1 \\
&= 1 \times 1 \times 1 \times 2 \\
&+ (-1) \times 1 \times 0 \times 0 \\
&+ 1 \times 2 \times 0 \times 1 \\
&+ (-1) \times 2 \times -2 \times 2 \\
&+ 1 \times -1 \times -2 \times 0 \\
&+ (-1) \times -1 \times 1 \times 1 \\
&= 2 - 0 + 0 - (-8) + 0 - (-1) \qquad (286) \\
&= 11 \qquad (287)
\end{aligned}$$

- 行列式の二つの性質
  - 行列式の多重線形性証明はしないが行列の次元によらず次が成立する.
    - 二次元の場合

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+lb_{11} & ka_{12}+lb_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{288}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21}+lb_{21} & ka_{22}+lb_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \tag{289}$$

    - 二次元の例

$$\begin{vmatrix} 2\times 1+3\times 2 & 2\times 2+3\times 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \tag{290}$$

一方で,

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1+(-1)\times(2))+3(-2+(-1)\times 1) \tag{291}$$

$$= -6+(-9) \tag{292}$$

$$= -15 \tag{293}$$

より成立している.

    - 三次元の場合

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+lb_{11} & ka_{12}+lb_{12} & ka_{13}+lb_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{294}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21}+lb_{21} & ka_{22}+lb_{22} & ka_{23}+lb_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{295}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31}+lb_{31} & ka_{32}+lb_{32} & ka_{33}+lb_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \tag{296}$$

– 行の入れ替えにより符号が変わる

  * 二次元の場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \tag{297}$$

  * 二次元の場合の例

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times -1 + (-1) \times 1 \times 1 \qquad = -3 \tag{298}$$

  一方で,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times -1 \times 2 \qquad = 3 \tag{299}$$

  で符号が変わっている事がわかる.

  * 三次元以上でも同様