線形代数 I (担当 松下勝義)

V. 行列式の定義と性質

教科書 §4.1-4.3, pp.47–59

講義ノート

- ある n 次正方行列 $\hat{A}$
  の行列式 $|\hat{A}|$ と余因子行列 $\hat{\tilde{A}}$ を用いて

$$\hat{\tilde{A}}\hat{A} = |\hat{A}|\hat{I}_n \tag{267}$$

  と書ける (定理 4.13) ある**数**である．行列でもベクトルでもない．もし，行列式が 0 出なければ，逆行列は

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\tilde{A}}}{|\hat{A}|} \tag{268}$$

  と書ける．従ってもし行列式

$$|\hat{A}| = 0 \tag{269}$$

  ならば逆行列が存在しない．

  このことからわかるのは係数行列の行列式 $|\hat{A}| \neq 0$ ならば連立一次方程式に解が存在する

  行列式

  連立一次方程式 $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在する

  $\Updownarrow$

  係数行列 $\hat{A}$ が正則

  $\Updownarrow$

  行列式 $|\hat{A}| \neq 0.$

- 行列式の応用
  行列式は使いこなせないと授業についていけません．
  - ベクトルの一次独立性の判定 (後期の線形代数の授業)
  - 積分の変数変換のヤコビアン (解析学の授業)
  - 定係数微分方程式の解のロンスキアンによる表示 (微分方程式の授業)

– 複数のベクトルが表す図形の体積の計算 (この授業でふれるかも).

- 行列式の例

  – 二次元行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{270}$$

の行列式 $|\hat{A}|$ を次で定義する.

$$|\hat{A}| = \sum_{(\sigma_1\ \sigma_2)} \mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \tag{271}$$

$$= \mathrm{sgn}(1\ 2) a_{11} a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1) a_{12} a_{21} \tag{272}$$

ここで, $\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)$ は順列 $(\sigma_1\ \sigma_2)$ の符号である.

* 順列
  (1 2) や (2 1) などの 1 からある数 n(ここでは 2) までの数字を順番に並べたもの.
  · (1 2) では $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$.
  · (2 1) では $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$.

* 順列の符号
  順列 $(\sigma_1\ \sigma_2)$ に対して符号 $\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)$ は i ¡ j のときに $\sigma_i > \sigma_j$ となっている i と j のペアの数 (転位数) が偶数の時

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) = 1 \tag{273}$$

  ペアの数 (転位数) が奇数の時

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) = -1 \tag{274}$$

  とする.

* 式 (272) の中にある順列.
  · (1 2) の符号
  $i = 1 < j = 2$ ならば $\sigma_1 = 1 < \sigma_2 = 2$ であり, 転位数は 0 で偶数である. 従って, 順列 (1 2) の符号 $\mathrm{sgn}(1\ 2)$ は

$$\mathrm{sgn}(1\ 2) = 1 \tag{275}$$

· (2 1) の符号
一方で, 順列 (2 1) は $i = 1 < j = 2$ ならば $\sigma_1 = 2 > \sigma_2 = 1$ であり, 転位数は 1 で奇数である. 従って, 順列 (2 1) の符号 sgn(2 1) は

$$\mathrm{sgn}(2, 1) = -1 \tag{276}$$

∗ 式 (272) は上記の順列の符号を使うと

$$\begin{aligned} |A| &= \mathrm{sgn}(1\ 2) a_{11} a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1) a_{12} a_{21} \\ &= 1 \times a_{11} a_{22} + (-1) \times a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

∗ 具体的な行列式の値

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{277}$$

の行列式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2) \times 2 \times 4 + \mathrm{sgn}(2\ 1) \times 3 \times 1 \\ &= 1 \times 2 \times 4 + (-1) \times 3 \times 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

– 三次元二次元と同様に定義する．3 次元正方行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{278}$$

の行列式は

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{279}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3)} \mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} a_{3\sigma_3} \\ &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) a_{11} a_{22} a_{33} \\ &+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2) a_{11} a_{23} a_{32} \\ &+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1) a_{12} a_{23} a_{31} \\ &+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3) a_{12} a_{21} a_{33} \\ &+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2) a_{13} a_{21} a_{32} \\ &+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1) a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned} \tag{280}$$

* 三次元での順列の符号
  - (1 2 3)
    明白は転位数は 0. 従って $\mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$.
  - (1 3 2)
    $i = 2 < j = 3$ で $\sigma_2 = 3 > \sigma_1 = 2$ より転位数は 1. 従って $\mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$.
  - 他の順列も同様に転位数から符号が定まる.
* 式 (280)

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}| &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1)a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3)a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2)a_{13}a_{21}a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1)a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= 1 \times a_{11}a_{22}a_{33} \\
&+ (-1) \times a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ 1 \times a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ (-1) \times a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ 1 \times a_{13}a_{21}a_{32} \\
&+ (-1)\times)a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

$*$ 具体的な行列式行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{281}$$

の行列式は

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) \times 1 \times 1 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2) \times 1 \times 0 \times 0 \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1) \times 2 \times 0 \times 1 \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3) \times 2 \times -2 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2) \times -1 \times -2 \times 0 \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1) \times -1 \times 1 \times 1 \\
&= 1 \times 1 \times 1 \times 2 \\
&+ (-1) \times 1 \times 0 \times 0 \\
&+ 1 \times 2 \times 0 \times 1 \\
&+ (-1) \times 2 \times -2 \times 2 \\
&+ 1 \times -1 \times -2 \times 0 \\
&+ (-1) \times -1 \times 1 \times 1 \\
&= 2 - 0 + 0 - (-8) + 0 - (-1) \\
&= 11
\end{aligned}$$

- 行列式の二つの性質
  - 行列式の多重線形性
    証明はしないが行列の次元によらず次が成立する.
    * 二次元の場合

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+lb_{11} & ka_{12}+lb_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{282}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21}+lb_{21} & ka_{22}+lb_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \tag{283}$$

    * 二次元の例

$$\begin{vmatrix} 2\times 1+3\times 2 & 2\times 2+3\times 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \tag{284}$$

      一方で,

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1+(-1)\times(2))+3(-2+(-1)\times 1) \tag{285}$$

$$= -6+(-9) \tag{286}$$

$$= -15 \tag{287}$$

      より成立している.
    * 三次元の場合

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+lb_{11} & ka_{12}+lb_{12} & ka_{13}+lb_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{288}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21}+lb_{21} & ka_{22}+lb_{22} & ka_{23}+lb_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{289}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31}+lb_{31} & ka_{32}+lb_{32} & ka_{33}+lb_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \tag{290}$$

    * 多重線形性からわかるように, $|\hat{A}+\hat{B}| \neq |\hat{A}|+|\hat{B}|$

– 行の入れ替えにより符号が変わる

  * 二次元の場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \tag{291}$$

  * 二次元の場合の例

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times -1 + (-1) \times 1 \times 1 \qquad = -3 \tag{292}$$

一方で,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times -1 \times 2 \qquad = 3 \tag{293}$$

で符号が変わっている事がわかる.

  * 三次元以上でも同様