線形代数 I (担当 松下勝義)

IV. 逆行列の解法

教科書 §3.3-3.5, pp.32–44

講義ノート

連立一次方程式はこれまで見てきたように行列にベクトルをかけた形で書ける.

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{260}$$

もし $\hat{A}$ が正方行列でもう一つ正方行列 $\hat{A}^{-1}$ が以下の性質を満たすとする.

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \tag{261}$$

このとき連立一次方程式 (260) の両辺から $\hat{A}^{-1}$ をかけると

$$\hat{A}^{-1}(\hat{A}\boldsymbol{x}) = (\hat{A}^{-1}\hat{A})\boldsymbol{x} = \hat{I}\boldsymbol{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{262}$$

となるので解が

$$\boldsymbol{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{263}$$

と形式的に求まる. このような $\hat{A}^{-1}$ は行列の普通の数の逆数に対応するもので逆行列と呼ぶ. 一般に逆行列を求めるのは掃き出し法より難しいため, 連立一次方程式を解くために逆行列を求めることはないが, 様々な応用があるため今回はこの逆行列を学習する.

- 逆行列の行基本変形による表現. 演習で行基本変形が行列でかけることを見た. 例として, 行基本変形は 2 行 2 列の範囲では
  - 1 行目と 2 行目を入れ替える,

    $$\hat{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{264}$$

  - 1 行目を n 倍する

    $$\hat{P}_1(n) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{265}$$

  - 2 行目を k 倍を 1 行目に足す

    $$\hat{P}_{21}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{266}$$

などのように書ける.

与えられた行列 $\hat{A}$ に対して, その階段行列 $\hat{B}$ をつくる行基本変形を $\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n$ と書くとき, これまで連立一次方程式の解法で見てきたように解が一意に決まる場合は $\hat{B}=\hat{I}$ でなければならない. このとき

$$\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n\hat{A}=\hat{I} \tag{267}$$

となる. 先ほど述べた通り, 逆行列は

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}=\hat{I} \tag{268}$$

を満たすため, （厳密には一意性が必要だが） 以下のように見なしてよい

$$\hat{A}^{-1}=\hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_3\cdots\hat{P}_n\hat{I} \tag{269}$$

ここで一番右の単位行列は必要ではないが, のちの逆行列の求め方の説明の都合上付けておく.

例としては演習問題 3–4 を考える.

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix} \tag{270}$$

この行列に対して演習問題の解答から

$$\hat{P}_{21}(-3)\hat{P}_2(-1/3)\hat{P}_{12}(-2)\hat{P}_{12}\hat{A}=\hat{I} \tag{271}$$

が成り立つが, これは逆行列が

$$\begin{aligned}
\hat{A}^{-1} &= \hat{P}_{21}(-3)\hat{P}_2(-1/3)\hat{P}_{12}(-2)\hat{P}_{12}\hat{I} && (272)\\
&= \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} && (273)\\
&= \begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix} && (274)
\end{aligned}$$

と計算できる. 実際に $\hat{A}$ に左からかけてみると,

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{275}$$

となる.

- 正則逆行列の存在する行列を正則行列と呼ぶ. 正則な行列に対しては
  - 逆行列が存在する.

– 係数行列とする連立一次方程式の解が一意に定まる.

– 行列の階数が正方行列の次数と一致する.

が成立している.

- 逆行列の解法逆行列が行基本変形を単位行列に施して得られることが分かった. これは以下のように行列 $\hat{A}$ と $\hat{I}$ に同時に行基本変形を行う事でも実行できる.

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{I} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{276}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{277}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \tag{278}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \tag{279}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \tag{280}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \hat{I} & \hat{A}^{-1} \end{array}\right) \tag{281}$$

と左の行列を行基本変形で階段行列へ変形すると右に逆行列ができる.

- 逆行列の性質もし $\hat{B}$ が存在し,

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{I} \tag{282}$$

とするとき, 右から $\hat{A}^{-1}$ をかけると

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{B} = \hat{B} = \hat{A}^{-1} \tag{283}$$

なので

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} = \hat{A}\hat{A}^{-1} \tag{284}$$

と逆行列とのかけ算は可換である.