線形代数 I (担当 松下勝義)

III. 行列の演算

教科書 §3.1-3.2, pp.29–32

講義ノート

ここまで行列と連立一次方程式の対応関係についてみてきた．この行列には連立一次方程式との関係を崩さず和や掛け算が定義できる．これ以降簡単のため 2 行 2 列の行列に絞って話す．

- 行列の和例えばもし行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{143}$$

を考えたときに

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{144}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{145}$$

のときは, 連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{146}$$

は

$$\hat{B}\boldsymbol{x} + \hat{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{147}$$

とあらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じになる，　という意味で

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{148}$$

という和が定義できる. この和は成分で書くと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{149}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y \\ c_{21}x + c_{22}y \end{pmatrix} \tag{150}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}x + c_{11}y + b_{12}x + c_{12}y \\ b_{21}x + c_{21}y + b_{22}x + c_{22}y \end{pmatrix} \tag{151}$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11} + c_{11})x + (b_{12} + c_{12})y \\ (b_{21} + c_{21})x + (b_{22} + c_{22})y \end{pmatrix} \tag{152}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{153}$$

より

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \tag{154}$$

とすれば成立する.　つまり, 成分毎の和を計算すればよい. この計算から行列の和は行と列の数が一致している場合のみ可能であることが分かる. 実際上の例の場合,

$$\hat{B} + \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{155}$$

である.

- 行列の積

$$\hat{A} = \hat{B}\hat{C} \tag{156}$$

としたとき, 連立一次方程式では

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{157}$$

と

$$\hat{D}(\hat{E}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \tag{158}$$

があらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じである．そのためには,

$$\hat{D}\hat{E}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \tag{159}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}x + e_{12}y \\ e_{21}x + e_{22}y \end{pmatrix} \tag{160}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}(e_{11}x + e_{12}y) + d_{12}(e_{21}x + e_{22}y) \\ d_{21}(e_{11}x + e_{12}y) + d_{22}(e_{21}x + e_{22}y) \end{pmatrix} \tag{161}$$

$$= \begin{pmatrix} (d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21})x + (d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22}) \\ (d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21})x + (d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22}) \end{pmatrix} \tag{162}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{163}$$

であるので, 次のように行列の積を定義する．

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \tag{164}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \tag{165}$$

次の例を考えよう

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{166}$$

とすると

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 0 & 1\times 2 + 0\times 0 \\ 2\times 1 + 1\times 0 & 2\times 2 + 0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{167}$$

注意！

$$\hat{E}\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 0\times 2 + 0\times 2 & 0\times 0 + 0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A \tag{168}$$

従って

$$\hat{D}\hat{E} \neq \hat{E}\hat{D} \tag{169}$$

である．一般に行列の積は可換

$$\hat{D}\hat{E} = \hat{E}\hat{D} \tag{170}$$

ではない.

また行列の積にも定数の積の 1 に対応するものが存在して単位行列と呼ぶ. 2 行 2 列の行列の場合は

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{171}$$

実際

$$\hat{I}_2 \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 2 & 1\times 2 + 0\times 4 \\ 0\times 2 + 1\times 2 & 0\times 2 + 1\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{172}$$

かつ

$$\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 2\times 0 + 4\times 1 & 2\times 0 + 4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{173}$$

となり左から掛けても右から掛けても元の行列 $\hat{A}$ になる.

- スカラー倍行列の定数 k 倍を

$$k\hat{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \tag{174}$$

とする例えば $k = 2$ とすると

$$2\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\times 1 & 2\times 2 \\ 2\times 2 & 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \tag{175}$$