解答例

- 演習問題 IV-1.
  - (1)

$$f(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2)=x_1f(\boldsymbol{e}_1)+x_2f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

  よって表現行列 $\hat{A}$ は,

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

  - (2) 表現行列 $\hat{A}$ は

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$

  と表せるので, $f(\boldsymbol{x})$ は $-\pi/4$ 回転を表す線形変換である.

  - (3)

$$\hat{A}\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{12}$$

  と変換される.

  - (4) $\hat{A}$ の逆行列を求めてもよいが, (2) から $f(\boldsymbol{x})$ が $-\pi/4$ 回転であることがわかっているので, その逆変換は $\pi/4$ 回転である. したがって,

$$\hat{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

  が求める逆変換の表現行列である.

  - (5) $\hat{A}$ の二乗をを求めてもよいが, (2) から $f(\boldsymbol{x})$ が $-\pi/4$ 回転であることがわかっているので, それを二回変換すると $-\pi/2$ 回転することが分かる. したがって,

$$\hat{A}^2=\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$