線形代数 II (担当 松下勝義)

I. (平面ベクトルと空間ベクトル)

問題

- 演習問題 I-1. 二つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, スカラー k, l,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad k = -1, \qquad l = 2,$$

  に対して次の問いに答えよ.

  - (1)　ベクトル $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ を求めよ.
  - (2) 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を求め, 直交しているか判定せよ.
  - (3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積を求めよ.

- 演習問題 I-2. 三つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対して,　ベクトル三重積 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ をベクトルの内積と和, スカラー倍を用いて表せ.

- 演習問題 I-3. 二つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, スカラー k, l,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad k = -1, \qquad l = 2,$$

  に対して次の問いに答えよ.

  - (1)　ベクトル $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ を求めよ.
  - (2) 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を求め, 直交しているか判定せよ.
  - (3) 外積 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.
  - (4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ が張る平行六面体の体積を求めよ.

解答例

- 演習問題 I-1.
  - (1)
  $$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} = -1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 4 + 2 \times 2 \\ -1 \times -3 + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$
  - (2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 4 \times 2 + -3 \times 3 =$ -1
  従って内積が 0 ではないので直交していない.
  - (3)
  $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 2 \times -3 = 18$$

- 演習問題 I-2. 第一成分のみを考える.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))_1 &= a_2(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_3 - a_3(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_2 \\
&= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\
&= b_1(a_2c_2) + b_1(a_3c_3) - c_1(a_2b_2) - c_1(a_3b_3) \\
&= b_1(a_2c_2) + b_1(a_3c_3) + [b_1(a_1c_1) - c_1(a_1b_1)] - c_1(a_2b_2) - c_1(a_3b_3) \\
&= b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= (\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))_1
\end{aligned}$$

- 演習問題 I-3.
  - (1)
  $$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} = -1 \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 4 + 2 \times 2 \\ -1 \times -3 + 2 \times 3 \\ -1 \times 1 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  - (2)
  $$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 4 \times 2 + -3 \times 3 + 1 \times 1 = 0$$
  内積が 0 なので直交している.
  - (3)
  $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 1 - 3 \times 1 \\ 1 \times 2 - 1 \times 4 \\ 4 \times 3 - 2 \times -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

– (4)

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})) &= (\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))) = (\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 \\
&= (4^2+(-3)^2+1^2)\times(2^2+3^2+1^2)-0 = 364
\end{aligned}
$$

演習 A. (平面ベクトルと空間ベクトル)

- 演習問題 A-1.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

としたとき,

  - (1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のそれぞれのノルムと内積を計算せよ.
  - (2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積を計算せよ.
  - (3) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ の内積と直積を計算せよ.
  - (4) $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の成す角を求めよ.
  - (5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ の成す平行六面体の体積を求めよ.

- 演習問題 A-2. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とその成す角を θ として

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos(\theta)$$

と書けることから余弦定理,

$$c^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos(\theta)$$

を示せ. ただし c は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る三角形のもう一つの辺の長さである.

- 演習問題 A-3. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とその成す角を θ とする. さらに $\boldsymbol{a}$ は第一成分のみ 0 ではなく, $\boldsymbol{b}$ は第三成分が 0 とするとき, 外積

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

の大きさが

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| = ||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \sin(\theta)$$

と書けることを示せ.

演習 A 解答例. (平面ベクトルと空間ベクトル)

- 演習問題 A-1.
  - (1)

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = \left(1^2+1^2+0^2\right) \qquad = 2$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (1\times 1+1\times 0+0\times 1) \qquad = 1$$

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = \left(1^2+0^2+1^2\right) \qquad = 2$$

  - (2)

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (1\times 1-0\times 0, 0\times 1-1\times 1, 1\times 0-1\times 1)\\ &(1,-1,1) \end{aligned} \tag{2}$$

  - (3)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\ &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\\ &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\\ &= 2-2\\ &= 0\end{aligned}$$

    また,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\ &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-(-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\boldsymbol{0}\\ &= 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\ &= 2(1,-1,1)\\ &= (2,-2,2)\end{aligned}$$

  - (4) (1) より内積が 0 なので $\pi/2$.
  - (5)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{vmatrix}\\ &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\ &= 2||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||^2\\ &= 12\end{aligned}$$

- 演習問題 A-2. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ - $\boldsymbol{a}$ と定義する．このとき,

$$\begin{aligned} c^2 = ||\boldsymbol{c}||^2 &= (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \\ &= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) - 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \\ &= ||\boldsymbol{b}||^2 - 2||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos(\theta) + ||\boldsymbol{a}||^2 \\ &= ||\boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{a}||^2 - 2||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos(\theta) \end{aligned}$$

  より余弦定理が示せる.

- 演習問題 A-3. ベクトル $\boldsymbol{a}$ は第一成分のみを持つことから,

$$\boldsymbol{a} = (||a||, 0, 0)$$

  と書ける．一方, ベクトル $\boldsymbol{b}$ は第三成分を持たないことと, θ は第一成分との成す角だとみなせることから,

$$\boldsymbol{b} = (||b|| \cos\theta, ||b|| \sin\theta, 0)$$

  と書ける．これを外積の定義に代入し計算する

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \left(\begin{vmatrix} 0 & ||b|| \sin\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ ||a|| & ||b|| \cos\theta \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ||a|| & ||b|| \cos\theta \\ 0 & ||b|| \sin\theta \end{vmatrix} \right) \\ &= (0, 0, ||a||||b|| \sin\theta) \end{aligned}$$

  となり, その大きさが $||a||||b|| \sin\theta$ となることが分かる.

線形代数 II (担当 松下勝義)

問題

II. (ベクトル空間, ベクトルの１次独立と１次従属, 基底と次元)

- 演習問題 II-1. (ベクトルの１次独立と１次従属) 以下のベクトルの組に対して１次独立か１次従属かを答えよ.
  - (1)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - (2)

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 演習問題 II-2. ４次元ベクトル空間を考えたとき, 以下の４つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  を生成系とする部分空間 W について次の問いに答えよ.
  - (1) W の次元を答えよ.
  - (2) W の基底になるベクトルを $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{a}_4\}$ から選んで与えよ..
  - (3) (2) で与えた基底に対して, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ の座標を与えよ.

解答例

- 演習問題 II-1.
  - (1) 以下のように階段行列へ基本変形を行う.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3}$$

  よって rank($\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$)=3 であり, 1 次独立である.

  - (2) 以下のように階段行列へ基本変形を行う.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

  よって rank($\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4$)=3 であり 1 次従属.

- 演習問題 II-2.
  - (1) 演習問題 II-1 (2) より rank が 3 であるので W の次元は 3 である.
  - (2) 演習問題 II-1 (2) より三つの独立なベクトルを選べば基底になる. 独立な選び方は複数あるが, ここでは (3) の簡便さのため

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$$

  ととる.

- (3) 演習問題 II-1 (2) より

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a}_1 = 1 \times \boldsymbol{a}_1 + 0 \times \boldsymbol{a}_2 + 0 \times \boldsymbol{a}_3 \\
\boldsymbol{a}_2 = 0 \times \boldsymbol{a}_1 + 1 \times \boldsymbol{a}_2 + 0 \times \boldsymbol{a}_3 \\
\boldsymbol{a}_3 = 0 \times \boldsymbol{a}_1 + 0 \times \boldsymbol{a}_2 + 1 \times \boldsymbol{a}_3 \\
\boldsymbol{a}_4 = \frac{1}{2} \times \boldsymbol{a}_1 + 0 \times \boldsymbol{a}_2 + (-\frac{1}{2}) \times \boldsymbol{a}_3
\end{cases}
$$

  であるので, 基底

$$
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \tag{5}
$$

  でのそれぞれの座標は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{a}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{a}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{a}_4 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

線形代数 II (担当 松下勝義)

III. (基底の取り換え, 直行基底, シュミットの直交化)

- 演習問題 III-1. 二つのベクトルの組からなる基底 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ と $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_b)$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して

  - (1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ と $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ を取り換え

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\hat{P} \tag{6}$$

で行列 $\hat{P}$ を求めよ.

  - (2)

$$\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle \tag{7}$$

かどうかを判定せよ.

  - 演習問題 III-2. 次の三次元ベクトル空間の基底

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

からシュミットの直交化法で正規直交基底を作れ.

解答例

- 演習問題 III-1.
  - (1). 連立一次方程式

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} \\ a_{11} & a_{21} & b_{12} \\ a_{13} & a_{23} & b_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の掃き出し法で解くと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より p_{11} = -1, $p_{12} = 1$. 同様に,

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

を解くと, p_{21}=1, p_{22}=1. 従って,

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  - (2). 行列 $\hat{P}$ の階段行列を求めると,

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり rank($\hat{P}$)=2 では $\hat{P}$ は正則である. 従って

$$\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$$

である.

- 演習問題 III-2.　シュミットの直交化を行うと,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_1 &= \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{c}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{c}_1)}{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)}\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1}{1^2 + 1^2 + 0^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{c}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{c}_1)}{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)}\boldsymbol{c}_1 - \frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{c}_2)}{(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2)}\boldsymbol{c}_2 \qquad (8) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 1}{1^2 + 0^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0 \times \frac{1}{2} + 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

正規化すると,

$$
\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{c}_1}{|\boldsymbol{c}_1|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{c}_2}{|\boldsymbol{c}_2|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{\boldsymbol{c}_3}{|\boldsymbol{c}_3|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}.
$$

演習 B. (ベクトル空間, 一次独立性, 線形変換と行列表現)

- 演習問題 B-1.

  二つのベクトルの組 A, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ ともう一つの組について B, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  について次の問いに答えよ.

  - (1) 二つの組 A, B はそれぞれ一次独立か従属かを答えよ.
  - (2) ４つのすべてのベクトルが張る部分空間 W の次元を答えよ.
  - (3) A が生成する部分空間 W_A と B が生成する W_B は同じであることを示せ.
  - (4) 部分空間 W_A と W_B の間の行列 $\hat{P}$,

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\hat{P}$$

    を与えよ.
  - (5) W_A と W_B からそれぞれシュミットの直交化法で正規直交基底を作れ.

- 演習問題 B-2. 二次元ベクトル空間の以下の基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

  に対して以下の問いに答えよ.

  - (1) 全てのベクトルの第一成分 (**上の基底の座標ではなく**) の符号を変える線形変換 $r_x(\boldsymbol{x})$ を与え, その表現行列を答えよ.
  - (2) $r_x(\boldsymbol{x})$ の逆変換の表現行列を答えよ.
  - (3) 上の基底での座標 $\boldsymbol{a} = (2, 3)$ を $(7, 5)$ へ, $\boldsymbol{b} = (1, 2)$ を $(4, 3)$ へ移す線形変換 $f(\boldsymbol{x})$ とその表現行列を与えよ.
  - (4) 上の基底での合成変換 $f \circ f(\boldsymbol{x})$ の表現行列を与えよ.
  - (5) $f \circ r_x(\boldsymbol{x})$ と $r_x \circ f(\boldsymbol{x})$ は同じか答えよ.

演習 B 解答例．(ベクトル空間, 一次独立性, 線形変換と行列表現)

- 演習問題 B-1.
  - (1) A も B もともにもし一次従属ならある定数 c_A, c_B が存在して,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 & = c_a \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_1 & = c_b \boldsymbol{b}_2 \end{cases}$$

    ところが c_a=1=0=∞ となり矛盾し, も $c_b = 0 =$ -1 $= 1$ となり矛盾する．従っていずれも一次独立である．

  - (2) 以下の行列を基本変形で階段行列に変形する．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

    従って rank $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2)$=2 であり W の次元は 2 である．

  - (3) W の次元が 2 である．従ってこの W は基底は二つの一次独立なベクトルからなる．従って W の基底として $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ を選ぶことができる．従って $W \subset W_A$．ところが W の定義から W は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ を含む生成系から作られるので $W_A \subset W$ である．従って $W = W_A$．一方, $W = W_B$ も同様に言えるので, $W_A = W = W_B$.

  - (4) まず p_{11}, p_{21} に対して,

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \tag{10}$$

    掃きだし法で

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

よって $(p_{11}, p_{21}) = (1, -1)$. 同様によって $(p_{12}, p_{22}) = (1, 1)$ であり,

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

となる.

– (5) A についてはまず一つ目の基底として $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{a}_1$ を採る. そして

$$\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{c}_1)}{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)}\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1 \times 1 + 0 \times -1 + 1 \times 0}{1^2 + 0^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{c}_1/||\boldsymbol{c}_1||$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{c}_2/||\boldsymbol{c}_2||$ として,

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

B に関しては $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0$ なので元より直交している. そして $\boldsymbol{e'}_1 = \boldsymbol{b}_1/||\boldsymbol{b}_1||$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}_2/||\boldsymbol{b}_2||$ として,

$$\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

- 演習問題 B-2.

- (1) 全てのベクトルの第一成分 (**上の基底の座標ではなく**) の符号を変える線形変換 $r_x(\boldsymbol{x})$ を与え, その表現行列を答えよ. 第一成分の符号を変える線形変換 $r_x(\boldsymbol{x})$ は

$$\begin{cases} r_x(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_2 \\ r_x(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{e}_1 \end{cases} \tag{14}$$

従って表現行列 B は

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- (2) 第一成分の符号をもう一度変えると元に戻る. 従って逆変換は r_x そのものであり, 表現行列は $\hat{B}$ である.

  – (3)

$$\begin{cases} f(2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2) = 2f(\boldsymbol{e}_1) + 3f(\boldsymbol{e}_2) = 7\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 \\ f(1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = f(\boldsymbol{e}_1) + 2f(\boldsymbol{e}_2) = 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

  より

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) \\ f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 \\ 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

  を解けばよい. 掃き出し法で

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 \\ 1 & 2 & 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \\ 1 & 2 & 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  従って

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

  かつ表現行列 $\hat{A}$ は,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  – (4) ただ単に $\hat{A}$ を二乗すればよい.

$$\hat{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  – (5) この解答例では計算は省略するが, $\hat{A}$ と $\hat{B}$ は非可換であることが確かめられる. したがって同じにはならない.

線形代数 II (担当 松下勝義)

IV. (線形変換と行列表現)

- 演習問題 IV-1. $\mathbb{R}^2$ の標準基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

とする. 線形変換 $f(\boldsymbol{x})$ を

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2, \tag{17}$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2 \tag{18}$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

  - (1) $f(\boldsymbol{x})$ の表現行列を答えよ.
  - (2) $f(\boldsymbol{x})$ は回転を表すか？, 表す場合は何度回転を表すか答えよ.
  - (3) 標準基底上の座標 $\boldsymbol{a}$=（2, 3）はこの線形写像でどのように変換されるか.
  - (4) $f(\boldsymbol{x})$ の逆変換の表現行列を答えよ.
  - (5) 合成写像 $f \circ f(\boldsymbol{x})$ の表現行列を与えよ.

解答例

- 演習問題 IV-1.
  - (1)

$$f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

よって表現行列 $\hat{A}$ は,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

  - (2) 表現行列 $\hat{A}$ は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

と表せるので, $f(\boldsymbol{x})$ は $-\pi/4$ 回転を表す線形変換である.

  - (3)

$$\hat{A}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{19}$$

と変換される.

  - (4) $\hat{A}$ の逆行列を求めてもよいが, (2) から $f(\boldsymbol{x})$ が $-\pi/4$ 回転であることがわかっているので, その逆変換は $\pi/4$ 回転である. したがって,

$$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

が求める逆変換の表現行列である.

  - (5) $\hat{A}$ の二乗をを求めてもよいが, (2) から $f(\boldsymbol{x})$ が $-\pi/4$ 回転であることがわかっているので, それを二回変換すると $-\pi/2$ 回転することが分かる. したがって,

$$\hat{A}^2 = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

線形代数 II (担当 松下勝義)

V. (行列の固有値と固有ベクトル)

以下の行列 $\hat{A}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ に対して連立方程式,
次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

- 演習問題 V-1.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

- 演習問題 V-2.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

- 演習問題 V-3.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

解答例

- 演習問題 V-1. $\hat{A}$ の固有方程式は

$$\left|x\hat{I}_2 - \hat{A}\right| = \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-4)(x-1)$$

  従って固有値は 4, 1. 固有値 4 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ は

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  より $\boldsymbol{u}_1 = (x,y) = c_1(1,-1)$ どうように固有値 4 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{u}_2 = (x,y) = c_2(2,1)$. ただし c_1, c_2 は任意定数.

- 演習問題 V-2. $\hat{A}$ の固有方程式は

$$\left|x\hat{I}_2 - \hat{A}\right| = \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)^2$$

  従って固有値は 2 のみで固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  より $\boldsymbol{u} = (x,y) = (1,1)$.

- 3 $\hat{A}$ の固有方程式は

$$\left|x\hat{I}_3 - \hat{A}\right| = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 2 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

  従って固有値は 3 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ は

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  より $\boldsymbol{u}_1 = (x,y,z) = c_1(0,1,-1)$. 同様に固有値 2 の固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_2 = (x,y,z) = c_2(2,3,-2)$. 同様に固有値 3 の固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_3 = (x,y,z) = c_3(1,1,0)$.

線形代数 II (担当 松下勝義)

VI. (行列の対角化)

以下の行列 $\hat{A}$ を対角化せよ． また対角化する正則行列 $\hat{P}$ を答えよ．(使える場合はレポート V の解答を使ってよい.)

- 演習問題 VI-1.
  - (1)
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$
  - (2) 対称行列
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
  - (3)
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
- 演習問題 VI-2. 以下の行列が対角化可能かを判定せよ.
  - (1)
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$
  - (2)
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解答例

- 演習問題 VI-1.
  - (1) $\hat{A}$ の固有値と固有ベクトルは問題 V-(1) より

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 4 \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

従って,

$$\hat{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \hat{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

従って対角化した行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

対角化するための正則行列は

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  - (2) $\hat{A}$ の固有方程式は

$$\left| x\hat{I}_2 - \hat{A} \right| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)(x-4)$$

従って固有値は λ_1=2 と λ_2=4. 固有値 λ_1=2 に対応する固有ベクトルは掃き出し法を用いて

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので任意定数 c_1 を用いて $\boldsymbol{u}_1 = c_1(1, -1)$. ここでは規格化して c_1 を決めて $\boldsymbol{u}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. 同様に固有値 λ_2=4 に対する規格化された固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. 従って, 対角化された行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

であり対角化するための正則行列は

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

という回転行列 (もしくは直行行列 $\hat{P}^\dagger \hat{P} = \hat{I}_2$) になる.

– (3) $\hat{A}$ の固有値と固有ベクトルは問題 V-(3) より

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 2 \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 = 3 \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

従って対角化した行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

対角化するための正則行列は

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 演習問題 V-2.

  – (1) $\hat{A}$ の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} x & -2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-2)$$

従って異なる二つの固有値を持つため, 二つの一次独立な固有ベクトルを持つ. 従って対角化可能である.

  – (2) $\hat{A}$ の固有値と固有ベクトルは問題 V-(2) より一つしかない. これは対角化には $\hat{A}$ が二次の行列であるため一つ足りない. 従って対角化できない.

線形代数 II (担当 松下勝義)

演習 C. (固有値と固有ベクトル, 行列の対角化)

- 演習 C-1.
  - (a) 次の行列 $\hat{A}$ に対して, 固有値, 固有ベクトルを求めよ.
  - (b) 対角化できるか判定せよ.
  - (c) 対角化できる場合, 対角化し, 対角化のための正則行列 $\hat{P}$ を求めよ. ただし, $\hat{A}$ が対称行列の場合, $\hat{P}1$ は直行行列として与えよ.
  - (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

  - (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

  - (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

  - (4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 演習 C-2.
  - (1) 次の二つの行列 $\hat{A}$, $\hat{B}$ に対して

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

    同じ正則行列 $\hat{P}$ で対角化可能か答えよ.
  - (2) 同じ $\hat{P}$ で対角化可能であれば $\hat{A}$, $\hat{B}$ が可換であることを示せ. (ヒント:対角行列同士は可換になる.)

演習 C 解答例. (固有値と固有ベクトル, 行列の対角化)

- 演習 C-1-(1).
  - (a) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} x+4 & -3 \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} = (x+3)(x-2)$$

従って固有値は λ_1=2 と λ_2=-3. 固有値 λ_1 の固有ベクトルは掃き出し法

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って未定定数 c_1 を用いて

$$\boldsymbol{u}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

同様に固有値 λ_2 に対して, 未定定数 c_2 を用いて

$$\boldsymbol{u}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - (b) (a) より二つの固有値の異なる固有ベクトルがあるため, 対角化可能.
  - (c) 対角化された行列は,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

であり,

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

- 演習 C-1-(2).
  - (a) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ -1 & x-3 & -1 \\ -3 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-2)(x-4). \tag{20}$$

よって固有値 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_1 = 4$ 固有値 $\lambda_1 = -1$ の固有ベクトルは, 未定定数 c_1 を用いて

$$\boldsymbol{u}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda_1 = 2$ の固有ベクトルは, 未定定数 c_2 を用いて

$$\boldsymbol{u}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda_1 = 4$ の固有ベクトルは, 未定定数 c_3 を用いて

$$\boldsymbol{u}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) 三つの異なる固有値が存在するため対角化可能.
- (c) 対角化された行列は,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

であり,

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

- 演習 C-1-(3)
  - (a) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ 1 & x-3 & -1 \\ 0 & -5 & x-4 \end{vmatrix} = x(x-4)^2$$

従って固有値は λ_1=0 と λ_2=4. 固有値 $\lambda_1 = 0$ の固有ベクトルは, 未定定数 c_1 を用いて

$$\boldsymbol{u}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

同様に固有値 $\lambda_2 = 4$ に対して, 未定定数 c_2 を用いて

$$\boldsymbol{u}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) 固有ベクトルが二つしかないため対角化できない.
- (c) 対角化できない.

• (4)

- (a) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-2)^2. \tag{21}$$

よって固有値 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ 固有値 $\lambda_1 = 0$ の固有ベクトルは, 未定定数 c_1 を用いて

$$\boldsymbol{u}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値 $\lambda_2 = 2$ の固有ベクトルは, 未定定数 c_2 を用いて

$$\boldsymbol{u}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

もう一つ固有値 $\lambda_1 = 2$ の固有ベクトルは, 未定定数 c_3 を用いて

$$\boldsymbol{u}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (b) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は互いに直交しており一次独立である. 従って対角化可能.
- (c) 対角化された行列は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

であり, $\hat{P}$ は直行行列として

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

となる.

- 演習 C-2.
  - (1) 二つの行列 $\hat{A}$, $\hat{B}$ の固有ベクトルを求めると, 共に固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1 = (1\ 0)$ と $\boldsymbol{u}_1 = (\text{-}1\ 1)$ を持つため,

    $$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    で対角化できる.
  - (2) 同じ正則行列 $\hat{P}$ で対角化可能か答えよ.
  - (2) $\hat{A}$ の対角行列を Λ_A, $\hat{B}$ の対角行列を Λ_B とする. このとき

    $$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= \left(\hat{P}\hat{P}^{-1}\right)\hat{A}\left(\hat{P}\hat{P}^{-1}\right)\hat{B}\left(\hat{P}\hat{P}^{-1}\right) \\ &= \hat{P}\left(\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P}\right)\left(\hat{P}^{-1}\hat{B}\hat{P}\right)\hat{P}^{-1} \\ &= \hat{P}\Lambda_A\Lambda_B\hat{P}^{-1} \\ &= \hat{P}\Lambda_B\Lambda_A\hat{P}^{-1} \\ &= \hat{P}\left(\hat{P}^{-1}\hat{B}\hat{P}\right)\left(\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P}\right)\hat{P}^{-1} \\ &= \hat{B}\hat{A} \end{aligned} \tag{22}$$

    となり同じ $\hat{P}$ で対角化できるならば可換である.

線形代数 II (担当 松下勝義)

VII. (直交行列, 対称行列の対角化)

- 演習問題 VII-1. 以下に与えられ対称行列を対角化する直交行列 $\hat{P}$ を与えよ.
  - (1)
  $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
  - (2)
  $$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
  - (3)
  $$\hat{C} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$
- 演習問題 VII-2. 対称行列 $\hat{S}$, その対角化行列 $\hat{\Lambda}_S$ にたいして
$$\boldsymbol{x}^\dagger \hat{S} \boldsymbol{x} = 1 \tag{23}$$
$$\boldsymbol{x}^\dagger \hat{\Lambda}_S \boldsymbol{x} = 1 \tag{24}$$
で表される二次曲線を共に二次元座標系 (x, y) 上で図示せよ. ただし
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{25}$$
  - (1) 問題 VII-1 で与えられた対称行列 S=$\hat{A}$ と $\hat{\Lambda}_A$.
  - (2) 問題 VII-1 で与えられた対称行列 S=$\hat{B}$ と $\hat{\Lambda}_B$.
  - (3) 問題 VII-1 で与えられた対称行列 S=$\hat{C}$ と $\hat{\Lambda}_C$.

解答例

- VII-1.
  - (1) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)$$

よって固有値は λ_1=0 と λ_2=2 固有値 λ_1=0 の固有ベクトルは掃き出し法で

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\boldsymbol{u}_1 = (1\ -1)$ 同様に λ_1=2 の固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_2 = (1\ 1)$ であり，　対角化する直行行列はそれぞれの固有ベクトルを規格化し並べて

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

  - (2) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

よって固有値は λ_1=-1 と λ_2=1 固有値 λ_1=-1 の固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_1 = (1\ 1)$ 同様に λ_1=1 の固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_2 = (1\ 1)$ であり，対角化する直行行列はそれぞれの固有ベクトルを規格化し並べて

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

  - (3) 固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda-\frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \lambda-\frac{7}{4} \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)$$

よって固有値は λ_1=1 と λ_2=2 固有値 λ_1=1 の固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_1 = (\sqrt{3}\ 1)$ 同様に λ_1=2 の固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_2 = (1\ -\sqrt{3})$ であり，　対角化する直行行列はそれぞれの固有ベクトルを規格化し並べて

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix}$$

- VII-2.

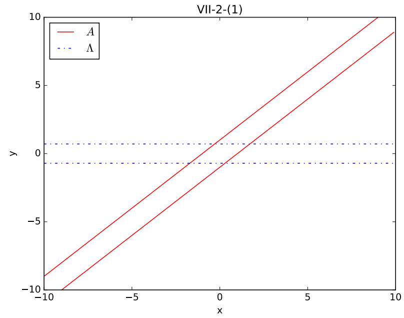
VII-2-(1)
A
Λ
10
5
0
−5
−10
y
−10
−5
0
5
10
x

図 1: (1)

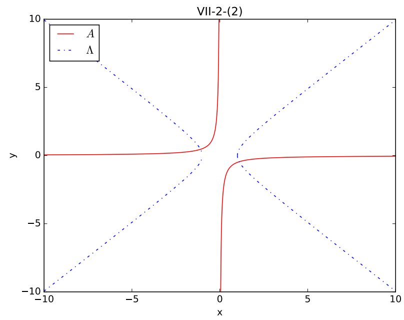
VII-2-(2)
A
Λ
10
5
0
−5
−10
y
−10
−5
0
5
10
x

図 2: (2)

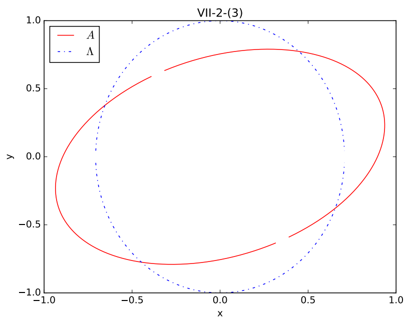
VII-2-(3)
A
Λ
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
y
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
x

図 3: (3)