線形代数 II 第六回 (担当 松下勝義)

8-2. 行列の対角化 (11/28, p.158)

1. 対角化の概要 (復習) 行列 $\hat{A}$ の対角化

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\Lambda}_F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{d-1} & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_d & \end{pmatrix} \tag{204}$$

を基底の取り換え

$$\boldsymbol{v}' = \hat{P}^{-1}\boldsymbol{v} \tag{205}$$

$$\hat{\Lambda}_F = \hat{P}^{-1}\hat{F}\hat{P} \tag{206}$$

でできる. このとき,

対角化 $\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P} = \hat{\Lambda}$

$$\begin{cases} \text{基底ベクトル} \ (\hat{P}\text{の列ベクトル}) & = \text{固有ベクトル} \ \boldsymbol{u}_i \\ \text{対角行列} \ (\hat{\Lambda}_F) \ \text{の成分} & = \text{固有値}\lambda_i \end{cases} \tag{207}$$

である.

2. 対角化と対角化可能条件 (対角化の説明, 定理 8.3)

- 対角化

対角化での基底の取り換え

対角化

$$\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P} = \hat{\Lambda} \tag{208}$$

の基底の取り換えのための行列 $\hat{P}$ は $\hat{A}$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$ としたとき

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \dots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \tag{209}$$

で与えられる.

2 次正方行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{210}$$

の 2 この固有値を

$$\lambda_1, \quad \lambda_2 \tag{211}$$

と固有ベクトルを

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} \tag{212}$$

とする．このとき

$$\hat{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} \tag{213}$$

である．式の右辺は,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{214}$$

従って,

$$\hat{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{215}$$

ここで

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{216}$$

とおくと,

$$\hat{A}\hat{P} = \hat{P}\hat{\Lambda} \tag{217}$$

$\hat{P}$ が正則であれば $\hat{P}^{-1}$ が存在し,

$$\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P} = \hat{\Lambda} \tag{218}$$

以上のことから対角化可能な条件は

対角化可能条件

$\hat{A}$ が対角化可能 $\Leftrightarrow \hat{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \dots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$ が正則.

- 連立一次方程式への応用.
  線形写像 f(x(t)) に対する方程式

$$f(x(t)) = x(t+1) \tag{219}$$

に対して,

$$\boldsymbol{x}(t+n) = \boldsymbol{b} \tag{220}$$

を満たす $x(t)$ を求めたいとする. このとき f(x(t)) の表現行列 $\hat{F}$ をつかって,

$$\hat{F}^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{221}$$

を解が満たす. この問題は $\hat{F}$ を対角化,

$$\boldsymbol{x}' = \hat{P}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{222}$$

$$\boldsymbol{b}' = \hat{P}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{223}$$

$$\Lambda = \hat{P}^{-1}\hat{F}\hat{P} \tag{224}$$

を考えたとき,

$$\Lambda^n \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \lambda_1^n x_1' \\ \lambda_2^n x_2' \\ \vdots \\ \lambda_d^n x_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}' \tag{225}$$

となるから,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{b_1'}{\lambda_1^n} \\ \frac{b_2'}{\lambda_2^n} \\ \vdots \\ \frac{b_d'}{\lambda_d^n} \end{pmatrix} \tag{226}$$

と解ける.

- 対角化可能性 (定理 8.3, P.160)
  対角化可能な場合は $\hat{P}$ が正則であることが必要. このときベクトル

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{227}$$

を考えたとき, 線形関係

$$\hat{P}\boldsymbol{k} = k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}. \tag{228}$$

を考えた場合, $\hat{P}$ が正則なため, $\boldsymbol{k}$ は零ベクトルのみが解を持つ.
つまり,

定理 8.3

定理 8. 3
n 次正方行列 $\hat{A}$ の対角化可能であるための必要条件:
$\hat{A}$ が n 個の一次独立な固有ベクトルを持つ.

3. 幾つかの例 (p.160 例題 8.5(8.2), 8.8(対角化不能な例))

- 例題 8.4(p. 159)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{229}$$

このとき固有値 λ_1=2 のとき,

$$\lambda_1 \hat{I}\boldsymbol{u} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0} \tag{230}$$

従って

$$-2u_{11} = u_{21} \to \boldsymbol{u}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{231}$$

ただし c_2 は任意定数.
固有値 $\lambda_2 = 5$ のとき,

$$\lambda_2 \hat{I}\boldsymbol{u}_5 - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0} \tag{232}$$

$$u_{12} = u_{22} \to \boldsymbol{u}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{233}$$

ただし c_5 は任意定数. このとき対角化した行列 Λ は

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{234}$$

で基底の取り換え $\hat{P}$ は

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{235}$$

実際,

$$\hat{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{236}$$

を使って,

$$\begin{aligned}\hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{237}$$

- 対角化できない例 (p.162, 例題 8.7)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \tag{238}$$

固有方程式は,

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -9 \\ 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3\lambda - 3 \\ 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 \tag{239}$$

従って固有値は 1 のみ. 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{240}$$

とおくと,

$$\begin{cases} -3u_1 - 9u_2 = 0 \\ u_1 + 3u_2 = 0 \end{cases} \tag{241}$$

で

$$\boldsymbol{u} = c\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{242}$$

の一つしかなく, 対角化できない.