線形代数 II 第二回 (担当 松下勝義)

6-1-1. ベクトル空間 (30 分, p.100)

1. 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の例と基底

- 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$

n 次元数ベクトル空間

n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ とは n 次元の数ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{56}$$

の線形演算 (スカラー倍と和) で新たに作られるベクトルがすべて属する集合. つまり $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$ ならば,

- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$
- $k\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$

- 基底とは情報を圧縮し最低限の情報のみでベクトル空間のベクトルを表す.
  - 多次数ベクトルの例としての百万画素のカラー画像データ
  - 動画のデータの情報圧縮と基底
  - 音声データとフーリエ空間, ウェーブレット. ソボレフ空間
  - 量子情報のヒルベルト空間, フォック空間
- $\mathbb{R}^n$ の n 次数の数ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{57}$$

四次数ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{58}$$

2. 数ベクトルの和とスカラー倍 (p. 101)
平面, 空間ベクトルと同じと述べる

3. n 次元数ベクトル空間の定義 (p. 101 下（１）ー（８）)
ベクトルの和とスカラー倍で結合則や分配則が成立するものと説明.

6-1-2. 部分ベクトル空間 (10 分, p. 102)

1. 一次結合

一次結合

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots k_m\boldsymbol{a}_m \quad (k_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n) \tag{59}$$

$\mathbb{R}^2$ の一次結合の例

$$2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{60}$$

2. 生成される部分空間と生成系 (例示)

- $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W

$\mathbb{R}^n$ の部分空間 W

$k_1, k_2, \ldots k_m \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ 　とするとき

$$W = \{k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots k_m\boldsymbol{a}_m\} \tag{61}$$

このとき,

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_m\} \tag{62}$$

を W の生成系と呼び,

$$W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_m \rangle \tag{63}$$

と表す.

- $\mathbb{R}^2$ の部分空間の例 (1)$^{\star 1}$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

$$W_a = \{k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2\} = \langle \boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \rangle \tag{65}$$

[1] 後で使う

- $\mathbb{R}^2$ の部分空間の例 (2)[*2]

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

$$W_b = \{k_1\boldsymbol{b}_1 + k_2\boldsymbol{b}_2\} = \langle \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2 \rangle \tag{67}$$

- $\mathbb{R}^2$ の部分空間の例 (3)[*3]

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

$$W_c = \{k_1\boldsymbol{c}_1 + k_2\boldsymbol{c}_2 + k_2\boldsymbol{c}_3\} = \langle \boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2\ \boldsymbol{c}_3 \rangle \tag{69}$$

3. 部分空間の性質 (p.102 命題 6.1, 部分空間は閉じている)[†]
上の例で (1)

$$k_1 = k_2 = 0 \rightarrow 0 \times \boldsymbol{a}_1 + 0 \times \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0} \in W \tag{70}$$

(2)

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 \tag{71}$$

$$\boldsymbol{b} = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 \tag{72}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 \tag{73}$$

$$= (k_1 + l_1)\boldsymbol{a}_1 + (k_2 + l_2)\boldsymbol{a}_2 \tag{74}$$

であるが $(k_1 + l_1) \in R$, かつ $(k_2 + l_2) \in R$ より $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$.

6-2-1. 部分ベクトル空間の基底 (10 分, p. 107)

1. ベクトルの表現法

定理 6.1[†]:ベクトルの集合を表現するのに必要なベクトルの数

適当な s 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ $\ldots$, $\boldsymbol{a}_s \in \mathbb{R}^n$ に対して, それらのベクトルが列ベクトルとなる行列の階数を r としたとき, r 個のベクトルの線形結合で全てのベクトルを表現できる.

2. 基底と座標

定理 6.2:基底

部分ベクトル空間 W のベクトル $\boldsymbol{a}$ は W の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ の一次結合で一意に表現できる.

[2]後で使う
[3]後で使う

- W の基底

W の基底

W の生成系でかつ一次独立なベクトルの集合

  – 線形関係 (p. 103)

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = 0 \tag{75}$$

  – 一次独立と一次従属（例示）

一次独立と一次従属

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s \in \mathbb{R}^n$ に対して, 一次関係

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 \cdots k_s\boldsymbol{a}_s = 0 \tag{76}$$

が成り立つときに,

* $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0 \Rightarrow$ 一次独立
* 一次独立ではない $\Rightarrow$ 一次従属

    * 一次従属の場合

$$\boldsymbol{a}_s = -\frac{k_1}{k_m}\boldsymbol{a}_1 - \frac{k_2}{k_m}\boldsymbol{a}_2 + \cdots - \frac{k_{m-1}}{k_m}\boldsymbol{a}_{m-1} \tag{77}$$

    と任意のベクトルが他のベクトルで書ける． 一次独立とはこのように他のベクトルでは書けないことを指す.

    * 一次従属の例

        · (1) は一次独立でないため二次元ベクトル空間の基底でも一次元部分空間の $(k, 0)$ の基底ではない.（階段行列から rank を計算して判定）

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 0 \tag{78}$$

        · † 例題 6.3（階段行列から rank を計算して判定）

    * 一次独立な例

        · (2) は二次元ベクトル空間の基底（階段行列から rank を計算して判定）

・† 例題 6.2（階段行列から rank を計算して判定）

- 座標と表現の一意性

座標

W の基底 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_m$ でベクトル $\boldsymbol{a}$ を

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m \tag{79}$$

と表したとき, $(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m)$ を $\boldsymbol{a}$ の座標と呼ぶ. この座標は規定が決まれば一意に決まる.

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{80}$$

を例 (2) の基底 B で表すと,

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 \tag{81}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{82}$$

これを掃き出し法で解くと座標 $(k_1, k_2) = (2, 3)$

3. 部分空間の次元 (定理 6.3, 6.4)

部分空間の次元

部分空間 W に対して次元 $=$ 基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ のベクトルの数つまり,

$$\dim W = \#\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\} \tag{83}$$

- 例 (1) の場合 $\dim W = 1$.

- 例 (2) の場合 $\dim W = 2$.