

線形代数 II (担当 松下勝義)

演習問題 4. (線形変換と行列表現)

- 演習問題 4-1. \mathbb{R}^2 の標準基底を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (94)$$

とする. 線形変換 $f(x)$ を

$$f(e_1) = e_1, \quad (95)$$

$$f(e_2) = -e_1 + e_2 \quad (96)$$

- (1) $f(x)$ の表現行列 \hat{A} を答えよ.
- (2) 標準基底上の座標 $a=(2,2)$ の $f(x)$ での変換先を与え, 図示せよ.

- 演習問題 4-2. \mathbb{R}^2 の以下の基底 $\{a_1, a_2\}$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

で表された線形変換

$$f_a(a_1) = a_2, \quad (97)$$

$$f_a(a_2) = -a_1 + 2a_2 \quad (98)$$

に対して以下の問いに答えよ.

- (1) $f_a(x)$ の基底 $\{a_1, a_2\}$ での表現行列 \hat{A}_a を与えよ.
- (2) $2a_1$ の $f_a(x)$ による変換先を与え, 標準基底の座標で図示せよ.
- (3) 基底 $\{a_1, a_2\}$ と標準基底 $\{e_1, e_2\}$ が

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \hat{P} \quad (99)$$

と表されるとき \hat{P} を与えよ.

- (4) a_1 と a_2 を e_1 と e_2 を用いて表せ.
- (5) $f_a(x)$ の標準基底での線形変換 $f_e(e_1), f_e(e_2)$ を与えよ.
- (6) 標準基底を用いた表現行列 \hat{A} が \hat{A}_a と \hat{P} を用いて

$$\hat{A} = \hat{P} \hat{A}_a \hat{P}^{-1} \quad (100)$$

と表せるか確かめよ.