

線形代数 II (担当 松下勝義)

演習 1. (平面ベクトルと空間ベクトル)

- 演習問題 1-1.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

としたとき,

- (1) \mathbf{a} と \mathbf{b} のそれぞれの長さを計算せよ.
- (2) \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積を計算せよ.
- (3) \mathbf{a} と \mathbf{b} の外積を計算し, 図示せよ.
- (4) $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ と $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ の内積を計算せよ.
- (5) $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ と $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ の外積を計算せよ.
- (6) \mathbf{x} と \mathbf{y} の成す角を求めよ.
- (7) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ の成す平行六面体の体積を求めよ.

- 演習問題 A-2. 空間ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} とその成す角を θ とする. そのとき余弦定理

$$c^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos(\theta)$$

が成立する. ただし, c は \mathbf{a} と \mathbf{b} が作る三角形のもう一つの辺のベクトル $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ である. この定理を使って

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos(\theta)$$

と書けることを示せ.

- 演習問題 A-3. 空間ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} を

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{b}\|\cos\theta \\ \|\mathbf{b}\|\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

とする. このとき, 外積

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

の大きさが

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin(\theta)$$

と書け, θ が \mathbf{a} と \mathbf{b} の成す角であることを示せ. ただし演習問題 1-2 の公式を使ってよい.