# ベクトルと行列 1 (担当 松下勝義)

## 1-VII. 行列式と解の公式

## 1-VII-0. 逆行列と連立 1 次方程式

連立一次方程式,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_1 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_1 \end{cases} \tag{1}$$

の解を求める方法として, 逆行列 $\hat{A}^{-1}$ をつかうと,

$$\boldsymbol{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{2}$$

となる. なのでもし, $\hat{A}^{-1}$ を $\hat{A}$ で表せれば解の公式を作ることができる. じつは $\hat{A}$ にたいしてその行列式 $|\hat{A}|$ と余因子行列 $\hat{\hat{A}}$ を用いてえ

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\hat{A}}}{|\hat{A}|} \tag{3}$$

と書ける. 実は余因子行列 $\hat{\hat{A}}$ も $\hat{A}$ の部分的な行列式で書けるため, この逆行列の公式はすべて行列式で表現される. この最後の章で行列式を定義し, その性質から上記の解の公式を導く.

## 1-VII-1. 行列式の応用

- **正方行列の行列式と解の存在**

  係数行列が正方行列のとき, 逆行列は

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\hat{A}}}{|\hat{A}|} \tag{4}$$

  と書ける. 従って解の公式は

$$\boldsymbol{x} = \frac{\hat{\hat{A}}}{|\hat{A}|}\boldsymbol{b} \tag{5}$$

  で与えられる. 従って, もし行列式が

$$|\hat{A}| = 0 \tag{6}$$

  ならば, 解は $\boldsymbol{x} \to \infty$ となり解の存在は保証されない.

このことからわかるのは係数行列の行列式 $|\hat{A}| \neq 0$ ならば連立一次方程式に解が存在し, その解は行列式で書ける. つまり,

行列式

$$\text{連立一次方程式 } \hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{係数行列 } \hat{A} \text{ が正則}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{行列式 } |\hat{A}| \neq 0.$$

となっている.

- **行列式の意味**

行列 $\hat{A}$ の行列式 $|\hat{A}|$ には以下の意味がある.

行列式の意味

行列式 $|\hat{A}| \simeq$
行列 $\hat{A}$ の行ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_n$ の成す体積 & 座標系の向き

これまで 2 次と 3 次の行列に対して, 面積, $D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ と体積 $D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ 行列式の二次元と三次元版に当たる. この意味のため行列式は以下のような応用がある.

– ベクトルの一次独立性の判定 (後期の線形代数の授業)

– 積分の変数変換のヤコビアン (解析学の授業)

– 定係数微分方程式の解のロンスキアンによる表示 (微分方程式の授業)

– 複数のベクトルが表す図形の体積の計算 (この授業).

## 1-VII-2. 行列式の定義

- **行列式の定義**

一般の正方行列 $\hat{A}$ に対して行列式は以下のように定義される.

**行列式の定義**

> $n$ 次正方行列 $\hat{A}$ の行列式 $|\hat{A}|$ を以下で定義する.
>
> $$|\hat{A}| = \sum_{\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}} \mathrm{sgn}\,(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\, a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n} \tag{7}$$
>
> ここで $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ は順列であり, 和はすべての順列に対してとる. また $\mathrm{sgn}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ は順列の符号である.

以下に行列式の例を挙げる.

- 二次元行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{8}$$

の行列式 $|\hat{A}|$ を次で定義する.

$$|\hat{A}| = \sum_{(\sigma_1\ \sigma_2)} \mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2} \tag{9}$$

$$= \mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21} \tag{10}$$

ここで, $\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)$ は順列 $(\sigma_1\ \sigma_2)$ の符号である. これを理解するために順列とその符号を以下で定義してゆく.

- **順列の定義**

ある 1 番目から始まる $n$ 個の整数, 1, 2, . . . , $n$ に対して, 順列は以下で定義される.

**順列**

> 順列 $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_n)$ は 1 から $n$ までの整数を並べ替えたものである.

順列の例として $n$=2 の場合を考える. この場合 (1 2) や (2 1) がその $n = 2$ の順列である. それぞれ,

- (1 2) では $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$.
- (2 1) では $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$.

- **順列の符号**

**順列の符号**

> 順列 $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ は
> 1 から $n$ の中の互いに異なる整数の全てのペア $i$, $j$ に対して,
>
> $i < j$ のときに $\sigma_i > \sigma_j$ となっているペアの数＝転移数
>
> とするとき
>
> $$\begin{cases} \text{転位数} = \text{偶数} & 1 \\ \text{転位数} = \text{奇数} & \text{-1} \end{cases} \tag{11}$$
>
> で定義する.

順列 $(\sigma_1\ \sigma_2)$ に対して符号 $\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)$ は $i$ ¡ $j$ のときに $\sigma_i > \sigma_j$ となっている $i$ と $j$ のペアの数 (転位数) が偶数の時

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) = 1 \tag{12}$$

ペアの数 (転位数) が奇数の時

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) = -1 \tag{13}$$

とする.

以下で順列の例を与える.

- 式 (10) の中にある順列.
  - (1 2) の符号
    $i = 1 < j = 2$ ならば $\sigma_1 = 1 < \sigma_2 = 2$ であり, 転位数は 0 で偶数である. 従って, 順列 (1 2) の符号 sgn(1 2) は

$$\mathrm{sgn}(1\ 2) = 1 \tag{14}$$

  - (2 1) の符号
    一方で, 順列 (2 1) は $i = 1 < j = 2$ ならば $\sigma_1 = 2 > \sigma_2 = 1$ であり, 転位数は 1 で奇数である. 従って, 順列 (2 1) の符号 sgn(2 1) は

$$\mathrm{sgn}(2, 1) = -1 \tag{15}$$

– 式 (10) は上記の順列の符号を使うと

$$|A| = \mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21} \tag{16}$$

$$= 1 \times a_{11}a_{22} + (-1) \times a_{12}a_{21} \tag{17}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{18}$$

– 具体的な行列式の値

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{19}$$

の行列式は

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2) \times 2 \times 4 + \mathrm{sgn}(2\ 1) \times 3 \times 1 \tag{20}$$

$$= 1 \times 2 \times 4 + (-1) \times 3 \times 1 \tag{21}$$

$$= 5 \tag{22}$$

– 三次元二次元と同様に定義する．3 次元正方行列 $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{23}$$

の行列式は

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3)} \mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3) a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}a_{3\sigma_3} \\ &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} \\ &+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{23}a_{32} \\ &+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1)a_{12}a_{23}a_{31} \\ &+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3)a_{12}a_{21}a_{33} \\ &+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2)a_{13}a_{21}a_{32} \\ &+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1)a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{25}$$

– 三次元での順列の符号

  * $(1\ 2\ 3)$
    明白は転位数は 0. 従って $\mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$.
  * $(1\ 3\ 2)$
    $i = 2 < j = 3$ で $\sigma_2 = 3 > \sigma_1 = 2$ より転位数は 1. 従って $\mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$.
  * 他の順列も同様に転位数から符号が定まる.
- 式 (25)

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}| &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1)a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3)a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2)a_{13}a_{21}a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1)a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= 1 \times a_{11}a_{22}a_{33} \\
&+ (-1) \times a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ 1 \times a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ (-1) \times a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ 1 \times a_{13}a_{21}a_{32} \\
&+ (-1)\times)a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

- 具体的な行列式行列

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{26}
$$

の行列式は

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) \times 1 \times 1 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2) \times 1 \times 0 \times 0 \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1) \times 2 \times 0 \times 1 \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3) \times 2 \times -2 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2) \times -1 \times -2 \times 0 \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1) \times -1 \times 1 \times 1 \\
&= 1 \times 1 \times 1 \times 2 \\
&+ (-1) \times 1 \times 0 \times 0 \\
&+ 1 \times 2 \times 0 \times 1 \\
&+ (-1) \times 2 \times -2 \times 2 \\
&+ 1 \times -1 \times -2 \times 0 \\
&+ (-1) \times -1 \times 1 \times 1 \\
&= 2 - 0 + 0 - (-8) + 0 - (-1) \\
&= 11
\end{aligned}
$$

- 行列式の二つの基本的性質

  - 行列式の多重線形性

    証明はしないが行列の次元によらず次が成立する.

    **行列式の多重線形性**

    行列式はそのある行 $i$ の行ベクトルを二つに分けた行列式の和と一致する.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ka_{i1}+lb_{i1} & ka_{i2}+lb_{i2} & \dots & ka_{in}+lb_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots b_{in} & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{27}$$

    * 二次元の場合

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+lb_{11} & ka_{12}+lb_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2)(ka_{11}+lb_{11})a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1)(ka_{12}+lb_{12})a_{21} \tag{28}$$

$$= k\left(\mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22}+\mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21}\right) + l\left(\mathrm{sgn}(1\ 2)b_{11}a_{22}+\mathrm{sgn}(2\ 1)b_{12}a_{21}\right) \tag{29}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{30}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21}+lb_{21} & ka_{22}+lb_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \tag{31}$$

    * 二次元の例

$$\begin{vmatrix} 2\times1+3\times2 & 2\times2+3\times1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \tag{32}$$

一方で,

$$2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\times(-1+(-1)\times(2))+3(-2+(-1)\times 1) \tag{33}$$

$$=-6+(-9) \tag{34}$$

$$=-15 \tag{35}$$

より成立している.

∗ 三次元の場合

$$\begin{vmatrix}ka_{11}+lb_{11} & ka_{12}+lb_{12} & ka_{13}+lb_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+l\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \tag{36}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{21}+lb_{21} & ka_{22}+lb_{22} & ka_{23}+lb_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+l\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \tag{37}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ ka_{31}+lb_{31} & ka_{32}+lb_{32} & ka_{33}+lb_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+l\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}. \tag{38}$$

∗ 多重線形性からわかるように, $|\hat{A}+\hat{B}|\neq|\hat{A}|+|\hat{B}|$

– 行列式の行の入れ替え

行列式の行の入れ替え

行列式の二つの行を入れ替えると符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{39}$$

* 二次元の場合

$$\mathrm{sgn}(1\ 2) = -\mathrm{sgn}(1\ 2) \tag{40}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2) a_{11} a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1) a_{12} a_{21} && (41) \\ &= -\mathrm{sgn}(2\ 1) a_{11} a_{22} - \mathrm{sgn}(1\ 2) a_{12} a_{21} && (42) \\ &= -\mathrm{sgn}(1\ 2) a_{21} a_{12} - \mathrm{sgn}(2\ 1) a_{22} a_{11} && (43) \\ &= - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} && (44) \end{aligned}$$

* 二次元の場合の例

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times -1 + (-1) \times 1 \times 1 \qquad = -3 \tag{45}$$

一方で,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times -1 \times 2 \qquad = 3 \tag{46}$$

で符号が変わっている事がわかる.

* 三次元以上でも同様

## 1-VII-3. 行列式の計算法

- **行列式の解法**

  まず行列式に対して一列目の一番上以外が 0 のときより小さい行列式に帰着される.

  – $n$=2 の場合

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(12) a_{11} a_{22} + 0 \\ &= a_{11} \mathrm{sgn}(2) a_{22} \\ &= a_{11} |a_{22}| \end{aligned}$$

  – 具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 \tag{47}$$

  実際,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2) 1 \times 3 + \mathrm{sgn}(2\ 1) 2 \times 0 = 1 \times 3 = 3 \tag{48}$$

  と一致する.

  – 三次元の場合

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) a_{11} a_{22} a_{33} + \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2) a_{11} a_{32} a_{23} + 0 + \cdots + 0 \\ &= a_{11} \left( \mathrm{sgn}(2\ 3) a_{22} a_{33} + \mathrm{sgn}(3\ 2) a_{32} a_{23} \right) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{49}$$

– 具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times (\mathrm{sgn}(1\ 2) 4 \times 7 + \mathrm{sgn}(2\ 1) 5 \times 6) = -2 \tag{50}$$

高次元でも数学的帰納法で同じことがいえる (教科書参照)

- **行列の次元低減による解法**

**行列の次元低減による解法**

もし行列 $\hat{A}$ の行列式の $|\hat{A}|$ の左の列ベクトルを

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

と変形できれば

$n$ 次元行列式 $\Rightarrow$ $n-1$ 次元行列式 $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ 2 次元行列式

と次元を小さくして低次元の行列式の計算にすることで計算できる.

– 式 (51) は行基本変形で変形することで実現できる.

行列式の行基本変形

1. 一つの行に 0 出ない定数 $k$ を掛ける.
   ⇒ 行列式は $k$ 倍される.
   例:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{52}$$

2. 一つの行の低数倍を他の行に足す. ⇒ 行列式は変わらない.
   例:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{53}$$

3. 行を入れ替える.
   ⇒ 行列式の符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \tag{54}$$

これらの行基本変形を使えば掃き出し法でやったように一列目を (51) のように変形できる.

- 行の定数倍の具体例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0 \tag{55}$$

実際に

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2)1 \times 4 + \mathrm{sgn}(2\ 1)2 \times 2 = 4 - 4 = 0 \tag{56}$$

- 行列式の計算の例

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 6 & 8\\1 & 8 & 10\end{vmatrix} \overset{②-①}{=} \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\1 & 8 & 10\end{vmatrix} \tag{57}$$

$$\overset{②-③}{=} \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 5\\0 & 6 & 7\end{vmatrix} \tag{58}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix}4 & 5\\6 & 7\end{vmatrix} \tag{59}$$

$$\overset{②-①}{=} 1 \times \begin{vmatrix}4 & 5\\2 & 2\end{vmatrix} \tag{60}$$

$$\overset{②/2}{=} 1 \times 2 \times \begin{vmatrix}4 & 5\\1 & 1\end{vmatrix} \tag{61}$$

$$\overset{①\Leftrightarrow②}{=} 1 \times 2 \times (-1) \begin{vmatrix}1 & 1\\4 & 5\end{vmatrix} \tag{62}$$

$$\overset{②-4①}{=} 1 \times 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix} \tag{63}$$

$$= 1 \times 2 \times (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix}1\end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) \times 1 \times 1 = -2 \tag{64}$$

- 行列式と列基本変形行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \tag{65}$$

の転置したもの

$$\hat{A}^t = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\a_{12} & a_{22} & a_{32}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix} \tag{66}$$

を転置行列と呼ぶ. このとき

転置行列の行列式

$$|\hat{A}| = |\hat{A}^t| \tag{67}$$

従って次のことがいえる.

**行列式の列基本変形**

列に対する基本変形を行っても行基本変形と同じことが成立する.

## 1-VII-4 余因子展開

- **余因子展開**

多重線形性を考えるとある行を次のように分解できる.

**余因子展開**

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \sum_j a_{ij} (-1)^{(} i+j)
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{1-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\
a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{68}
$$

余因子展開の例を挙げると,

– n=2 の場合,

多重線形性から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{69}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \tag{70}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} + (-1) a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} \tag{71}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} \end{vmatrix} \tag{72}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} \tag{73}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{74}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \tag{75}$$

$$= a_{22} (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} + (-1) a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \end{vmatrix} \tag{76}$$

$$= (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \end{vmatrix} \tag{77}$$

- n=3 の場合,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a13 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{78}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{79}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{80}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1) a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{81}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{82}$$

などと展開できる.

余因子

余因子展開を

$$\left|\hat{A}\right| = \sum_j a_{ij}\tilde{a}_{ij} \tag{83}$$

と書いたとき, n-1 行 n-1 列行列の行列式 $\tilde{a}_{ij}$

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^(i+j) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{1-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{84}$$

を余因子と呼ぶ.

余因子に対して以下の性質がある.

余因子の性質

行列 $\hat{A}$ の $i$ 行目の余因子を列に並べたベクトル

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_i = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{i1} \\ \tilde{a}_{i2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{in} \end{pmatrix} \tag{85}$$

に対して $j$ 行ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を考えると

$$\begin{cases} i = j & \boldsymbol{a}_j \tilde{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{a}_i \tilde{\boldsymbol{a}}_i = \sum_k a_{ik} \tilde{a}_{ik} = \left| \hat{A} \right| \\ i \neq j & \boldsymbol{a}_j \tilde{\boldsymbol{a}}_i = \sum_k a_{jk} \tilde{a}_{ik} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \tag{86}$$

## 1-VII-5 連立一次方程式の解の公式

先に示した余因子のなす列ベクトル $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$ と行列の各行ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ の内積は

$$\boldsymbol{a}_j \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_i = |\hat{A}| \delta_{ij} \tag{87}$$

であることが分かる. $\delta_{ij}$ はクロネッカーの $\delta$ と呼ばれ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{88}$$

で定義される, $i$, $j$ を行列の行, 列と見做したときの単位行列と思ってよい. の性質から, 次のことが分かる. 余因子行列 $\hat{\tilde{A}}$

$$\hat{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2 & \ldots & \tilde{\boldsymbol{a}}_n \end{pmatrix} \tag{89}$$

を考えると,

$$\hat{A}\hat{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2 & \dots & \tilde{\boldsymbol{a}}_n \end{pmatrix} \tag{90}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \boldsymbol{a}_n \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \cdot \tilde{\boldsymbol{a}}_n \end{pmatrix} \tag{91}$$

$$= \begin{pmatrix} \left|\hat{A}\right| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left|\hat{A}\right| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left|\hat{A}\right| \end{pmatrix} \tag{92}$$

$$= \left|\hat{A}\right| \hat{I}_n \tag{93}$$

となる. これは余因子行列と元の行列 $\hat{A}$ の積が単位行列に比例し, その比例係数は行列式 $|\hat{A}|$ であることを示す.

この両辺を行列式 $|\hat{A}|$ 次の逆行列の公式 (Cramer's rule) が成り立つ.

逆行列の公式

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\hat{A}}}{|\hat{A}|} \tag{94}$$

そして連立一次方程式の解として

$$\boldsymbol{x} = \frac{\hat{\hat{A}}}{|\hat{A}|}\boldsymbol{b} \tag{95}$$

が得られる.

## 1-VII-6 行列式の性質

行列式どうしの演算は定義から計算すると複雑であるが以下の有用な性質を知っておけば簡単に計算できることが多い.

- **行列式の積**

  証明は与えないが行列式の積の計算はそれぞれの行列式が分かっていれば以下の性質のため簡単に計算できる.

**行列式の積**

次元が同じ正方行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の行列式の積にたいして,

$$\left|\hat{A}\hat{B}\right| = \left|\hat{A}\right|\left|\hat{B}\right| \tag{96}$$

のように $|\hat{A}|$ とに $|\hat{B}|$ の積になる.

ただし, 和に関しては多重線形性より行列式の和にはならない

$$|\hat{A}+\hat{B}| \neq |\hat{A}||\hat{B}| \tag{97}$$

ので注意する事.

- **逆行列の行列式**

  逆行列の行列式を計算すると

正則行列 $\hat{A}$ の逆行列 $\hat{A}^{-1}$ の行列式は,

$$\left|\hat{A}^{-1}\right| = \left|\hat{A}^{-1}\right| \frac{\left|\hat{A}\right|}{\left|\hat{A}\right|} = \frac{\left|\hat{A}^{-1}\hat{A}\right|}{\left|\hat{A}\right|} = \frac{1}{\left|\hat{A}\right|} \tag{98}$$

なので

**逆行列の行列式**

正則行列 $\hat{A}$ の逆行列 $\hat{A}^{-1}$ の行列式は,

$$\left|\hat{A}^{-1}\right| = \frac{1}{\left|\hat{A}\right|} \tag{99}$$

である.