

ベクトルと行列 1 (担当 松下勝義)

1-V. 階段行列と解の分類

1-IV-0. 掃き出し法の復習 (p. 52)

もし以下の連立一次方程式,

$$\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

の解が一つに定まるとする. 一回目の講義で分かったように, その拡大係数行列,

$$\left(\hat{A} \quad \mathbf{b} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

の係数行列 \hat{A} を行基本変形

行基本変形

1. 1つの行に0でない定数を掛ける
2. 1つの行の定数倍を他の行に掛ける
3. 2つの行を入れ替える

を用いて

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

の形に直すことで

$$\left(\hat{A} \quad \mathbf{b} \right) \Rightarrow \left(\hat{I} \quad \mathbf{d} \right) \quad (4)$$

の \mathbf{d} から解を得ることができた.

ところがレポートや演習で見えてきたように連立一次方程式は解が一つに定まるとは限らない. これらは一次方程式の表す図形の配置を反映しており, 解が ∞ 個ある場合や, 解がない場合も存在する. これらの場合においても実は係数行列 \hat{A} は**階段行列**というものへ行基本変形で一意に変形できる. そして階段行列から求まる行列の**階数**を計算し解が存在するかどうかを知ることができる. 今回はこれらの場合の行列による解の存在の判定法を述べる.

1-V-1 階段行列

先に述べたように任意の行列 \hat{A} は単位行列へ行基本変形では変形できない。その代わりに以下に示す階段行列と呼ぶものへ変形できる。

階段行列

ピボット という値が 1 の行列の成分が存在しそれが以下の条件を満たす。

1. ピボットがない行のすべての成分は 0
2. ピボットより左にある成分はすべて 0
3. ピボットのある列の列番号を p_i としピボットを含む行の数を r ($< m$ で m は行列の行の数) とすると

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_{r-1} < p_r. \quad (5)$$

4. 各ピボットを含む列ベクトルの成分はピボット以外で 0.

これらの条件を満たす行列を**階段行列 (echelon)** と呼ぶ。

以下に直観的にどのようなものかを理解するため階段行列の例を示す。

● 階段行列の例 1 (単位行列)

以下のような単位行列は階段行列の条件をすべて満たす。すなわち、これまで行基本変形で単位行列にしていたものは階段行列へ変形していたということになる。このとき、四角で囲んでいるものがピボットに対応する。

$$\hat{I}_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

● 階段行列の例 2

単位行列へ変形できない例として、以下のような階段行列を考えることができる。

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

この場合もピボットを四角で囲んでいる。それらはやはり階段行列の条件を満たしている。

- 階段行列ではない例

以下の場合には階段行列ではないなぜなら 2 行 2 列成分の 1 はピボットでなければならないが, 1 行 2 列成分が 0 で無いため, ピボットが満たすべき条件を満たしていないからである.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

この場合は行基本変形で一行目から二行目を引けば,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}-2\textcircled{2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

のように例 2 のような階段行列へ変形できる.

階段行列への変形と階数

- 階数

行列 \hat{A} は行基本変形で階段行列 \hat{B} に変形できる. このとき階段行列のピボットの数 r を $\text{rank}(\hat{A})$ もしくは $r(\hat{A})$ と書き行列の階数と呼ぶ.

————— 行列の階数 —————

以下のように与えられた行列 \hat{A} を階段行列 \hat{S} へ変形したとき,

$$r(\hat{A}) = \hat{A} \text{ のピボットの数} \quad (10)$$

- 階数と解の分類

係数行列 \hat{A} の列数 n と階数 r に対して以下が成り立つ.

— 連立一次方程式の科の存在の判定 —

ある連立一次方程式の拡大係数行列

$$\left(\hat{A} \quad \mathbf{b} \right) \quad (11)$$

行基本変形で係数行列を階段行列 \hat{B} へ, 右辺のベクトル \mathbf{b} が別のベクトル \mathbf{d} からなる拡大係数行列へ変形できたとする. つまり,

$$\left(\hat{A} \quad \mathbf{b} \right) \Rightarrow \left(\hat{B} \quad \mathbf{d} \right) \quad (12)$$

このとき,

- $d_{r+1} = \dots d_n = 0$ ではない. \Rightarrow 解なし
- $d_{r+1} = \dots d_n = 0$ かつ $r=n$ 解が一つ存在する.
- $d_{r+1} = \dots d_n = 0$ かつ $r < n$ 解が ∞ 個あり未定定数 $n-r$ 個で書ける.

となる.

- 解が一意に定まる場合 (例題 3.3(1))

連立一次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \quad (13)$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

この場合階段行列は単位行列 \hat{I}_3 になり, \mathbf{d} の 0 ではない成分の数は 3, r も階数 (ピボット数) が 3 であり d_4 等はなく 0 とみなしてよい. 列の数 3 であるから解が一意であることがわかる.

- 解が無限に存在する場合 (例題 3.3(2))

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \quad (15)$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-2\textcircled{1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3}-3\textcircled{1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2}/7} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3}-2\textcircled{2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1}+2\textcircled{2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\hat{C} \quad \mathbf{d}) \quad (20)$$

となる. $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots)$ より $d_i \neq 0$ である d_i は d_1 と d_2 の二つであり, この数は階数 (ピボットの数) $r = 2$ と一致している. よってこの連立一次方程式には解が存在する. ただし, r が \hat{A} の列数 n と一致していないため, それが一意ではない.

解を実際に書く下してみよう. 変数の数 (係数行列の列数) n が 3 で, 一つの変数が定まらず解が ∞ 個あることが分かる. 従って, 未知定数 c 一つで解を書くことができる. $z = c$ として連立一次方程式を変形後の拡大係数行列で書けば,

$$\hat{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \quad (21)$$

であり, $z = c$ を使うと,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

より

$$\begin{cases} x - c = 2 \\ y + c = -1 \end{cases} \quad (23)$$

となる. よって解は

$$\begin{cases} x = 2 + c \\ y = -1 - c \\ z = c \end{cases} \quad (24)$$

である. この場合 c は任意なので解は無限個存在する.

- 解が存在しない場合 (例題 3.3(3))

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 3x - 4y - 7z = 10 \end{cases} \quad (25)$$

拡大係数行列の係数行列を行基本変形で階段行列へ変形する.

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2} - 2\textcircled{1}} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 3 & -4 & -7 & 10 \end{array} \right) \quad (26)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2} - 3\textcircled{1}} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \quad (27)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3}/2} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad (28)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -4 \end{array} \right) \quad (29)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3} - 7\textcircled{2}} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -2 & -3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \quad (30)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1} + 2\textcircled{2}} \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \quad (31)$$

より $d_n \neq 0$ の数が 3 で階数 (ピボットの数) $r = 2$ より大きい. そのため解は無い.

実際, 解として (x, y, z) が存在するとすると,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (32)$$

より

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = -1 \\ 0 = 3 \end{cases} \quad (33)$$

となるため最後の式が矛盾してしまう.