ベクトルと行列 1 (担当 松下勝義)

1-IV. 掃き出し法

1-IV-0. 掃き出し法の概要 (p. 52)

これまで述べてきたように, この授業では連立一次方程式,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

を考える. ここで,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とし, 連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3}$$

と表現し, それを使って $\hat{A}$ と $\boldsymbol{b}$ のみで解くのが掃き出し法である. この掃き出し法は基本的にある行の式を別の行に定数倍して足すことで変数を消して解を求める消去法をこの表現に改めたものである. そこで今回の講義は消去法の復習から始め, 掃き出し法を解説し, この連立一次方程式に解があるかどうかについて分類する.

1-IV-1. 消去法 (p. 52)

先にも述べたように, 掃き出し法の説明のため, まず連立 1 次方程式は消去法を説明する.

説明を簡単にするために, 以下の連立一次方程式を例として考えよう

$$\begin{cases} 2x & +3y = & 7 \\ x & -2y = & 0 \end{cases} \tag{4}$$

この連立一次方程式は次のように解ける.

1. ①番目の式と②番目の式を入れ替える.

$$\begin{cases} 2x & +3y = & 7 \\ x & -2y = & 0 \end{cases} \overset{①\Leftrightarrow②}{\Rightarrow} \begin{cases} x & -2y = & 0 \\ 2x & +3y = & 7 \end{cases} \tag{5}$$

2. ②番目の式から①番目の式の 2 倍を引く.

$$\begin{cases} x & -2y = & 0 \\ 2x & +3y = & 7 \end{cases} \overset{②-2①}{\Rightarrow} \begin{cases} x & -2y = & 0 \\ 0 & +7y = & 7 \end{cases} \tag{6}$$

3. ②番目を 1/7 倍する.

$$\begin{cases} x & -2y = & 0 \\ 0 & +7y = & 7 \end{cases} \overset{②/7}{\Rightarrow} \begin{cases} x & -2y = & 0 \\ 0 & +y = & 1 \end{cases} \tag{7}$$

4. ①番目の式に②番目の式の 2 倍を足す.

$$\begin{cases} x & -2y = & 0 \\ 0 & +y = & 1 \end{cases} \overset{①-2②}{\Rightarrow} \begin{cases} x & 0 = & 2 \\ 0 & +y = & 1 \end{cases} \tag{8}$$

従って解は $x = 2$, $y = 1$ である. 基本変形と呼ばれるこの式変形は x,

この解法では以下の三つの式変形の繰り返しとなっている.

基本変形

消去法による連立一次方程式を解くときは以下の三つの連立一次方程式の基本変形で未知数を消去して解を求める.

1. 1 つの方程式に 0 でない定数を掛ける
2. 1 つの方程式の定数倍を他の方程式に掛ける
3. 2 つの方程式を入れ替える

この手続きは未知変数 x や y に寄らず, 係数の変形だけでできる事に注目する. 実際係数行列というものを考えると係数の変形だけでこの連立一次方程式を解くことができる.

1-IV-2 連立一次方程式の行列による表現 (p. 56)

中間試験前に一度連立一次方程式の行列による表現については説明したが, ここで復習を行う. 連立一次方程式を係数の情報を抜き出すために行列としての表現を例,

$$\begin{cases} 2x & +3y = & 7 \\ x & -2y = & 0 \end{cases} \tag{9}$$

を基に考えよう.

未知変数 x や y の係数をその順番のまま並べた行列を係数行列 $\hat{A}$ と呼ぶ. この連立一次方程式の場合は

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

である．さらに連立一次方程式を考えるため未知変数のベクトルと右辺のベクトル,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

を用いる．これらを使うと,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{12}$$

と連立一次方程式が書ける．

実際以前説明した行列とベクトルの掛け算

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \tag{13}$$

とベクトル $\boldsymbol{x}$ にたいして

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \times x + a_{12} \times y \\ a_{21} \times x + a_{22} \times y \end{pmatrix} \tag{14}$$

となることを用いると, 例の連立一次方程式では

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times x + 3 \times y \\ 1 \times x + (-2) \times y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - 2y \end{pmatrix} \tag{16}$$

となる．さらにベクトルの同値性, つまり, 二つの 2 次数ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

を考えたとき, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 & = b_1 \\ a_2 & = b_2 \end{cases}. \tag{18}$$

を意味することから,

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y & = & 7 \\ x - 2y & = & 0 \end{cases} \tag{20}$$

と同値であることが分かる．

1-IV-3　掃き出し法　(p. 56)

- **拡大係数行列**

  この解法は係数の操作のみで行えることに注意すれば行列でも同様に解くことができる．この消去法を行列で行うため次の連立一次方程式 $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列を考える

拡大係数行列

以下の連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{21}$$

に対して, 係数行列と右辺のベクトル,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{を並べた行列,} \tag{22}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{23}$$

を拡大係数行列と呼ぶ.

例の連立一次方程式では,

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

となる.

- **行基本変形と掃き出し法**

  拡大係数行列を利用して消去法での基本変形と同様に解を求める．このとき, 拡大係数行列の基本変形に対応するのは三つの行基本変形である.

行基本変形

行列に対して以下の行に対する変形を行基本変形と呼ぶ.

1. 1 つの行に 0 でない定数を掛ける
2. 1 つの行の定数倍を他の行に掛ける
3. 2 つの行を入れ替える

この行基本変形を用いて拡大係数行列を変形していくのであるが, どのように変形すれば解が求まるかを考えよう. 簡単のために 2 行 2 列で考える. 消去法では,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = d_1 \\ y = d_2 \end{cases} \tag{25}$$

と基本変形で変形する. ここでベクトル,

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

は連立一次方程式の解である. この際, 右の変形後の連立一次方程式の左辺は

$$\begin{cases} 1 \times x + 0 \times y \\ 0 \times x + 1 \times y \end{cases} \tag{27}$$

と見做せる. つまり変形後の連立一次方程式の係数行列は

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

であり, という単位行列になっている. 対応する連立一次方程式は,

$$\hat{I}_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{29}$$

となる. そのため対応する拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_2 & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & d_2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

である. このことから消去法は以下の拡大係数行列の変形を行う事と対応する.

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{I}_2 & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{31}$$

つまり解を求めるためには拡大係数行列の係数行列を行基本変形で単位行列へ変形すればよい．これが掃き出し法である．

掃き出し法

拡大係数行列を行基本変形を用いて

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{I}_n & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{32}$$

のように変形し, 解として $\boldsymbol{d}$ を得る方法を掃き出し法と呼ぶ.

実際に例において行基本変形で係数行列部分の $\hat{A}2$ 次の単位行列

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

へ変形してみよう．まず, 1 行目の 2 行目を入れ替える.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \tag{34}$$

1 行目の-2 倍を 2 行目へ足す.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \tag{35}$$

2 行目の 1/7 倍する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

2 行目の 2 倍を 1 行目へ足す.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

と変形できた．解は右辺のベクトルから

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = 1 \end{cases} \tag{38}$$

であり, 消去法と同じ結果が得られた.

- **解が無い場合**

　掃き出し法で係数行列を単位行列に変形しようとしてもできない場合がある．例えば,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \tag{39}$$

のようなものを考えれば二つの式が矛盾している. 従って, この連立一次方程式には解は存在しない. この場合行基本変形で変形していくと,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

となり係数行列をそれ以上単位行列へ近づけるように変形できず単位行列にできない. これは前に解説した一次方程式が表す二つの直線が交点を持たないことに対応している. それ以外にも直線が重なってしまう場合に対応する事もありうる. 次回の講義ではこれらの場合の処理について解説し, 連立一次方程式の解の存在の分類を行う.