ベクトルと行列 1 (担当 松下勝義)

1-II. 直線と平面

1-II-0. 連立一次方程式と直線や平面

この授業では連立一次方程式を考えることを前回説明した．二元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

を考える．この連立一次方程式はは二つの式からなるがそれぞれ未知変数 x, y のある直線を意味する．

同様に, 三元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

の解も三つの式が空間中の平面を意味する．

解はそれぞれの直線や平面の式を満たす物であり, それぞれが交わる交点である．

今回は前回のベクトル演算の知識を基に連立一次方程式をなすそれぞれの一次方程式の表す図形との関係を見る．

1-II-1. 直線と直線条件 (p. 25)

- 二次元の直線条件と直線の方程式 (p. 25& p. 29)

二次元平面上のある二つの点 U, V への位置ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を結ぶ直線状にベクトル $\boldsymbol{x}$ がある条件は直線条件と呼ばれる.

直線条件

$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を結ぶ直線状にあるためには, ある実数 t があって,

$$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{u} + (1-t)\boldsymbol{v} \tag{3}$$

と書けなければならない.

このとき t の値は $\boldsymbol{x}$ の各点と対応している. このようにある図形の各点を表現する t のような変数をパラメーター (媒介変数) と呼ばれる. またこのような表現法をパラメーター (媒介変数) 表示通常は $t(\boldsymbol{x})$ の逆関数 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ を考えて t に対して $\boldsymbol{x}$ が一つ対応するとみなす.

今

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

と書くと, この式は

$$x = u_1 t + (1-t)v_1 = (u_1 - v_1)t - v_1 \tag{5}$$

$$y = u_2 t + (1-t)v_2 = (u_2 - v_2)t - v_2 \tag{6}$$

これらの式を t に対して書き直すと,

$$t = \frac{x - v_1}{u_1 - v_1} = \frac{y - v_2}{u_2 - v_2} \tag{7}$$

と書ける. この式の二番目の = で結ばれる関係は直線の方程式と呼ばれ, 直線を表す. この式でベクトル $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, つまり,

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - u_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

は直線の向きと呼ばれ, 実際に直線はそのベクトルの向きに沿って引かれる. この式は三次元に教科書にあるように容易に拡張できる.

具体例として

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

を考えこれら二組のベクトルからそれらを通る直線のパラメータ表示を求めよう.

二次元平面内の座標として

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{10}$$

として式 (3) を書くと,

$$\boldsymbol{x}_1 = t_1\boldsymbol{u}_1 + (1-t_1)\boldsymbol{v}_1 = t_1(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1) + (1-t_1)\boldsymbol{v}_1 = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = t_2\boldsymbol{u}_2 + (1-t_2)\boldsymbol{v}_2 = t_2(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2) + (1-t_2)\boldsymbol{v}_2 = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

が求めるパラメータ表示である. これらから t_1, t_2 を消去すれば直線の方程式も得られる.

● 二次元の直線条件と二元一次方程式

ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対して二次元面上でのその垂直なベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える. そのとき,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} = 0 \tag{13}$$

ただし,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

とおく. 式 (3) の両辺に対して $\boldsymbol{a}$ との内積を取ると,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{15}$$

となり,

$$b = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{16}$$

とおくとこれは一次方程式,

$$a_1x + a_2y = b \tag{17}$$

であり, 二元連立一次方程式の一つとなる.

従って, 二元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{18}$$

は二つの二次元面上の直線を表し, その解がもし一意に定まるなら解はその交点である.

具体例として先に挙げた例

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

を考え一次方程式を導出しよう.

これらの垂直ベクトルを計算する. 垂直ベクトルを作るのに便利な方法は外積を考える事だが, 二次元ではできない. そこで前回演習でもやったように二次元面に垂直な向きを考え, 第 1, 2 成分は面内, 第 3 成分が面に対して垂直な成分を考える.

$$\boldsymbol{u}_1^* - v_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2^* - v_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

に垂直なベクトルベクトルを外積で作る事を考える. その垂直ベクトルは二次元面にあるため, 面に対して垂直方向のベクトルとも垂直でなければならない. そこで

$$\boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

を考えて,

$$\boldsymbol{a}_1^* = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}^* \tag{22}$$

$$\boldsymbol{a}_2^* = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}^* \tag{23}$$

を計算すると,

$$\boldsymbol{a}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

が得られ, 二次元面ない部分が第 1, 2 成分であるから,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

とすればよいことが分かる.

　これらの $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ をそれぞれパラメータ表示の式 (11) と (12) の両辺で内積を取ると, 左辺はそれぞれ,

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{x} = x + y \tag{26}$$

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{x} = x - y \tag{27}$$

右辺は $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1 = 0$ 及び $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2 = 0$

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot [t_1(\boldsymbol{u}_1 - v_1) + \boldsymbol{v}_1] = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 1 \tag{28}$$

$$\boldsymbol{a}_2 \cdot [t_2(\boldsymbol{u}_2 - v_2) + \boldsymbol{v}_2] = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 = -1 \tag{29}$$

が得られる.

結果的にこれらの 2 直線から

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \tag{30}$$

という二元連立一次方程式が得られた.

これらの直線を作図すると以下のようになる.

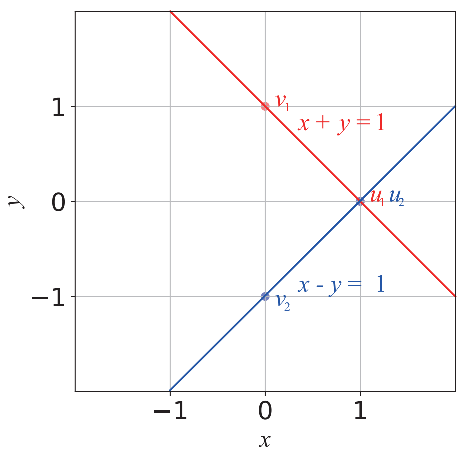

図 1: (II-1)

この図から交点は (1, 0) であるがこれは確かに上の連立一次方程式の一意の解である.

• 1-II-3 ベクトルの一次独立性 (p. 15)

二元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{31}$$

の一意に解があれば, 解はそれぞれの二元一次方程式の交点に対応することを述べた．そのような一意の交点は直線の向きが同じであれば存在しない．従って直線の向きから解の存在は判別できる．

直線の向きは方向ベクトルでも分かるが, それらの垂直ベクトル,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \tag{32}$$

が位置ベクトルとしてみたときに同じ直線状にあるのと同じである．解が存在する条件は, これらのベクトルが同一直線状にない条件を考えればよい．

同一直線状に無いという条件としてベクトルの独立性を説明する．二次元ベクトルの組 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ を次のような条件を満たすとする．ある定数 $k_a, k_b, k_c, \ldots$ が存在し,

$$k_a\boldsymbol{a} + k_b\boldsymbol{b} + k_c\boldsymbol{c} + \ldots \tag{33}$$

とする．このときこの式の左辺を一次結合と呼ぶ．

一次独立と一次従属

一次結合が零ベクトルとなるとき, つまり

$$k_a\boldsymbol{a} + k_b\boldsymbol{b} + k_c\boldsymbol{c} + \cdots = \boldsymbol{0} \tag{34}$$

となるとき,

$$k_a = k_b = k_c = \cdots = 0 \tag{35}$$

のときのみ成立するなら**一次独立**, そうでないなら**一次従属**と呼ぶ．

直線の並行と直線の並行と一次独立と一次従属の意味を平面ベクトルで考えてみる．二つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ を考える．このとき一次結合は,

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0} \tag{36}$$

とする．もし一次従属なら $k_1 \neq 0$, $k_1 \neq 0$ となる k_1 と k_1 が存在する

ため,

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{a}_2 \tag{37}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{a}_1 \tag{38}$$

と互いに別のベクトルで表現でき, 組の中の任意のベクトルが他のベクトルで表現できるという意味がある. 同時に二次元の場合は位置ベクトルとして同一直線状にある事と対応する.

例えば,

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{39}$$

とすれば,

$$2\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{40}$$

であり一次従属である. このとき,

$$\boldsymbol{f} = -2\boldsymbol{e} \tag{41}$$

と $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{e}$ が表現できてしまう. これは図示すると,

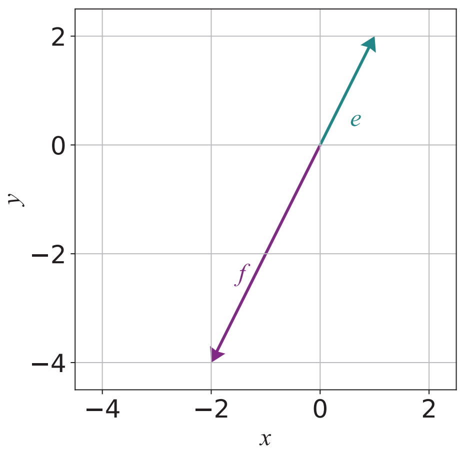

図 2: (II-2)

2 つのベクトルが同一直線状にある. 3 つ以上のベクトルに関しては, 同じように一つのベクトルを他のベクトルで表現できるという意味がある.

一方で, 次の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{42}$$

の場合は,　図示すると のようになって互いに相手のベクトルを定数倍

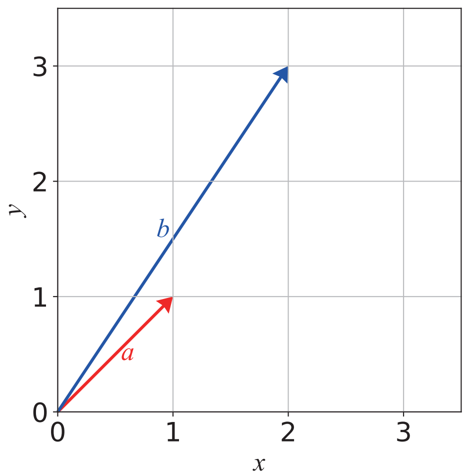

図 3: (II-3)

で表現できない. これが一次独立である. この場合は位置ベクトルとして同一直線状には無い.

まとめると交点を持つ条件は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が一次独立である事である. そして同時に対応する二元連立一次方程式は解が一つに定まる. 一方で, 交点を一意に持たない場合は対照的に $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が一次従属になる. その場合, 二つの直線の重なりには二つの可能性がある.

- 直線が重る.
- 直線が重ならない.

これら三つの状況はそれぞれ連立一次方程式の解に対して

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1 \text{と} \boldsymbol{a}_2 \text{が一次独立} \Leftrightarrow \text{直線が一点で交差.} \Leftrightarrow \text{解が交差点で一意} \\ &\boldsymbol{a}_1 \text{と} \boldsymbol{a}_2 \text{が一次従属} \begin{cases} \text{直線が重る.} \Leftrightarrow \text{直線上の無限個の点全てが解.} \\ \text{直線が重ならない.} \Leftrightarrow \text{解が存在しない.} \end{cases} \end{aligned} \tag{43}$$

となる. 解の分類については 3 章に入った後の授業で詳しく議論する.

二つの直線に対する垂直ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の一次独立性はそれらが辺となる平行四辺形の面積が 0 でないことから調べられる．平行四辺形の面積 A は教科書の p. 18 にある通り，

$$D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{44}$$

のようになる．これが 0 でなければ一次独立である．例えば式 (39) では，

$$D(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) = 1 \times -4 - (-2) \times 2 = 0 \tag{45}$$

で面積が 0 になり一次従属である．一方, (42) では，

$$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \times 3 - 1 \times 2 = 1 \tag{46}$$

で面積が 0 でなく一次独立である．

1-II-2. 平面と平面条件 (p. 26 & p. 30)

- 三次元の平面条件と平面の方程式

二次元平面上の直線と同様に三次元空間での三つの点 U, V, W への位置ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を通る平面上に一ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する条件は平面条件と呼ばれる．

平面条件

$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を通る平面上に存在するとき, ある定数 r, s, t が存在して，

$$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \tag{47}$$

と書け, $r + s + t= 1$ でなければならない．

平面上にある点の例として, が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の重心がある．重心の座標 $\boldsymbol{g}$ は，

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}}{3} \tag{48}$$

であるが, これは $r = 1/3$, $s = 1/3$, $t = 1/3$ で $r + s + t= 1$ を満たす．

平面の方程式を導出するため, 二次元直線と同様に, 平面に垂直なベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える．それを作るためには, 平面と平行な二つのベクトル，

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} \end{cases} \tag{49}$$

を考えこれらと垂直なベクトルを考えればよい．その候補としてこれらの外積が考えられる．つまり，

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\times(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}) \tag{50}$$

$$= \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w} \tag{51}$$

$$= \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u} \tag{52}$$

である．これに, 式 (47) の両辺と内積を取ると,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = r(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot u + s(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} + t(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} \tag{53}$$

$$= (r+s+t)(\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})) \tag{54}$$

$$= (\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})) \tag{55}$$

ここでスカラー三重積 $(\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}))$ を b とおけば, 三元一次方程式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = b \tag{56}$$

が得られる．この三元一次方程式で

$$b = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0 \tag{57}$$

として,

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0} \tag{58}$$

としたものが平面の方程式である．

このことから三元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{59}$$

の解はそれぞれの三元一次方程式上にあるので, 結果的にそれらの表す平面の交点に対応することが分かる．この場合も垂直ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \tag{60}$$

の一次独立性から, 解が一意に決まるかどうかが定まる．三次元の場合はこれらのベクトルを位置ベクトルと見た場合, 同一平面上に無いことに対応する．一次従属であれば無限個あるか, 解無しかになる．その場合これらのベクトルは同一平面内にある．

このような三つの平面を表す三元連立一次方程式の $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が同一平面にあるかどうかはそれらが辺になる平行四面体の体積が 0 につぶれているかどうかで判断できる．つまり, p. 23 にあるように平行四面体の体積となるスカラー三重積

$$D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) \tag{61}$$

が 0 であれば一次従属となる．これが 0 でなければ一次独立で解が一意に定まる．

1-II-A1. 補足:一次独立性と行列式

一次独立性の判断で用いた $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ や $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ は行列式と呼ばれるものの例である．詳しくは後期に解説する．ここで挙げた例では行列式を用いて一次独立性を確認しているが, これが可能な場合は連立一次方程式の式の数と変数の数が一致しているときである．一般には行列の階数を用いて行うが, それは 3 章で解説する．