

補足7 行列式の性質と計算

- 行列式の計算を定義から行うのは困難. ところが, 行列のように行基本変形から容易に計算できる. それは次の二つの事実を用いる.

1. 行列式は行基本変形で以下の様に変形される. n 次正方行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ を考える.

(a) ある行 (i 行目とする) を定数 k 倍すると行列式は k 倍される.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (155)$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (156)$$

に対して 1 行目を 2 倍した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (157)$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2|\hat{A}| \quad (158)$$

実際, $|\hat{A}'| = 2$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (159)$$

に対して 2 行目を 2 倍した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (160)$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = 2|\hat{A}| \quad (161)$$

実際, $|\hat{A}'| = -6$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

(b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (162)$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (163)$$

に対して 2 行目を 2 倍した行を 1 行目に足した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (164)$$

の行列式を考えると、

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |\hat{A}| + 2 \times 0 = |\hat{A}| \quad (165)$$

実際、 $|\hat{A}'| = 1$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている。

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (166)$$

に対して 2 行目を 2 倍したものを 1 行目に足した行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (167)$$

の行列式を考えると、

$$|\hat{A}'| = |\hat{A}| \quad (168)$$

実際、 $|\hat{A}'| = -3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている。

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (169)$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (170)$$

に対して 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (171)$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -|\hat{A}| \quad (172)$$

実際, $|\hat{A}'| = -1$ で $|\hat{A}| = 1$ であるから満たされている.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (173)$$

に対して 1 行目と 2 行目を入れ替えた行列

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (174)$$

の行列式を考えると,

$$|\hat{A}'| = -|\hat{A}| \quad (175)$$

実際, $|\hat{A}'| = 3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

2. 第一列の成分で 0 出ないものが a_{11} のみの時 \hat{A}

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (176)$$

\hat{A} の行列式は

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} |\hat{C}| \end{aligned} \quad (177)$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (178)$$

– 例 2 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (179)$$

に対して 1 次小さい行列

$$\hat{C} = (1) \quad (180)$$

との対応を考えると,

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times |\hat{C}| = 1 \quad (181)$$

実際,

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (182)$$

に対して 1 次小さい行列

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (183)$$

の行列式との対応を考えると,

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times |\hat{C}| = -3 \quad (184)$$

実際, $|\hat{C}| = -3$ で $|\hat{A}| = -3$ であるから満たされている.

3. 行列式の計算の仕方

上の二つを用いると, 以下の手順で計算できる.

(a) 行基本変形で行列式を式 (176) の形にする.

(b) (177) を使って行列式の次数を一つ減らす

これを行列式の次数が 1 になるまで繰り返す.

– 例 3 次の正方行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (185)$$

に対して,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 \times |-3| = 1 \times 1 \times -3 = -3 \end{aligned} \quad (186)$$

– 例 4 次の正方行列

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -1 & 11 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times -1 \times \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times -1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times -1 \times 4 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times -1 \times 4 \times 4 \times |8| = 1 \times -1 \times 4 \times 4 \times 8 \\ &= -128 \end{aligned} \quad (187)$$

– 三角行列 \hat{A} の行列式は

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (188)$$

は先の計算を繰り返すと,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{23} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ 0 & \ddots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\quad \vdots \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{n-1n-1} a_{nn} \\ &= \prod_i a_{ii} \end{aligned} \quad (189)$$

となる.

• 行列式の行基本変形の証明

1. (a) ある行を定数 k 倍すると行列式は k 倍される. $\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目が k 倍されている行列を \hat{A}' とすると, 定義より

$$\begin{aligned} |\hat{A}'| &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots k a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k |\hat{A}| \end{aligned} \quad (190)$$

- (b) ある行の定数 k 倍を別の行に足しても行列式は変わらない.
この証明には (c) を用いる. まず, $\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目の k 倍した行列の行列式 $|A'|$ を考えると,

$$\begin{aligned} |A'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + k a_{j1} & \cdots & a_{in} + k a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + k a_{j\sigma(j)}) \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + k \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (191)$$

第二項では i 行目と j 行目が同じ ($a_{j1} \cdots a_{jn}$) になっている.
ところが i 行目と j 行目が同じ行列式のその二つの行を入れ

替えると (c) より,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (192)$$

と 0 になることが分かる. 従って第二項を 0 と置くことで,

$$|\hat{A}'| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = |\hat{A}| \quad (193)$$

(c) 二つの行を入れ替えると行列式の符号が変わる. $\hat{A} = (a_{ij})$ の i 行目に j 行目が入れ替わった行列を \hat{A}' とすると,

$$\begin{aligned} |\hat{A}'| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\quad \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\ &\quad \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (194) \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
& \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \sigma(i+1) \sigma(i+2) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\
&= -1 \times \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i+1) \sigma(j) \sigma(i+2) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\
&= (-1)^2 \times \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i+1) \sigma(i+2) \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\
&= (-1)^{(j-i)} \times \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i+1) \sigma(i+2) \cdots \sigma(i) \sigma(j) \cdots \sigma(n)) \\
&= (-1)^{(j-i)} \times (-1)^{(j-i-1)} \times \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i) \sigma(i+1) \sigma(i+2) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(n)) \\
&= -\text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i) \sigma(i+1) \sigma(i+2) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(n))
\end{aligned} \tag{195}$$

従つて,

$$\begin{aligned}
|\hat{A}'| &= \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n)) \\
&\quad \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= - \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma(1) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(n)) \\
&\quad \times a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= -|\hat{A}|
\end{aligned} \tag{196}$$

- 第一列の成分で 0 出ないのが a_{11} のみの場合の証明

1. 次のような行列式 $|\hat{A}|$ を考える.

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (197)$$

この行列式は必ず定義の数ある項の中で一行目から a_{11} を選ぶ項のみが 0 でない. そのような a_{11} を含む項はすでに 1 行目から成分を選んでいるため b_{1i} のいずれかの成分を含めない. 従って

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n)) a_{11} c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \quad (198)$$

ここで $\text{sgn}(1, \sigma(2) \cdots \sigma(n))$ は最初の 1 が固定されているため, $\text{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n))$ と実質同じになる. 結果として,

$$\begin{aligned} |\hat{A}| &= a_{11} \sum_{\sigma \in P_n} \text{sgn}(\sigma(2) \cdots \sigma(n)) c_{2\sigma(2)} c_{3\sigma(3)} \cdots c_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} |\hat{C}| \end{aligned} \quad (199)$$

ただし,

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (200)$$