補足5　逆行列

1. 逆行列と正則

   n 次正方行列 $\hat{A}$ に対して,

$$\hat{A}\hat{X} = \hat{X}\hat{A} = I_n \tag{91}$$

   が成立する $\hat{X}$ のことを逆行列と呼び, $\hat{A}^{-1}$ で表す.

   また $\hat{A}$ に対して逆行列が存在する事を $\hat{A}$ は **正則** であると言う．また, この $\hat{A}$ を正則行列とも呼ぶ.

   - 注意 1: つまり必ず逆行列が存在するわけではない.
   - 注意 2: 逆行列は存在すれば一意である (定理 3.2).

2. 逆行列の存在と連立一次方程式の解の存在.

   連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{92}$$

   の係数行列に対して逆行列 $\hat{A}^{-1}$ が存在する場合を考える．式 (**??**) に左から $\hat{A}^{-1}$ を掛けると

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \tag{93}$$

   である．従って式 (91) より連立一次方程式の解は

$$\boldsymbol{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{94}$$

   となる.

   - 注意: 連立一次方程式を解くために逆行列を求めるのは不適切であり, 通常, 掃き出し法などが用いられる．理由は逆行列を求める手順数より掃き出し法の方が手順が少ないからである.

3. 逆行列と行基本変形

   連立一次方程式は行基本変形でも解くことができた．そして, 行基本変形は次のような行列の掛け算でも表せる.

(a) i 行を定数 c 倍する.

$$\hat{P}_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c\ (i\ \text{行}\ i\ \text{列}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{95}$$

例:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{96}$$

の二行目を 2 倍する.

$$\hat{P}_2(2)\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{97}$$

(b) j 行目を c 倍して i 行に足す.

$$\hat{P}_{ij}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c(i\ \text{行}\ j\ \text{列}) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{98}$$

例:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{99}$$

の 1 行目の 2 倍を 2 行目に加える.

$$\hat{P}_{12}(2)\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\times 4 & 2\times 5 & 2\times 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{100}$$

(c) i 行と j 行を入れ替える.

$$\hat{P}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1(i\text{ 行 } j\text{ 列}) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1(i\text{ 行 } j\text{ 列}) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{101}$$

例:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{102}$$

の 1 行目の 2 行目を入れ替える.

$$\hat{P}_{12}\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{103}$$

係数行列 $\hat{A}$ に行基本変形を k 解繰り返す事で階段行列にすることができた (定理 3.7).

もし階段行列が

$$\hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_k\hat{A}=\hat{I}_n \tag{104}$$

のように単位行列であれば, 逆行列 $\hat{A}^{-1}$ は

$$A^{-1}=\hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_k \tag{105}$$

と書けることを意味する (定理 3.8).

4. 逆行列の求め方

$\hat{A}$ を行基本変形で階段行列へ変形し, 単位行列 $\hat{I}_n$ が得られたものとする. そして, その行基本変形を

$$\hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_k \tag{106}$$

とする.

逆行列は式 (105) から,

$$\hat{A}^{-1}=\hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_k\hat{I}_n \tag{107}$$

と書ける.

このことから逆行列 $\hat{A}^{-1}$ は行列 $\hat{A}$ の単位行列への行基本変形を単位行列 $\hat{I}_n$ に施すことで得られる.

- 例: (教科書　例題 3.4)