補足 4　行列の演算

1. $m \times n$ 行列の記法

$$\hat{A} = (a_{ij}) \tag{60}$$

ここで a_{ij} は § 補足 2.2 で定義した i 行 j 列成分.

2. 行列の相等
$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i,\ j \tag{61}$$

- 例 (相等)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \hat{A} = \hat{B} \tag{62}$$

- 例 (不等)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \hat{A} \neq \hat{B} \tag{63}$$

3. 行列の和
和は行列の行と列の数が同じものに対してのみ定義される.
$m \times n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$, $m \times n$ 行列 $\hat{B} = (b_{ij})$ に対して,

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \forall i,\ j \tag{64}$$

- 例

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \hat{A} + \hat{B} &= \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+1 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{65}$$

4. 行列のスカラー倍
$l \times m$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ に対して,

$$k\hat{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij}) \quad \forall i,\ j \tag{66}$$

ただし $k = -1$ の場合,

$$(-1)\hat{A} = -\hat{A} \tag{67}$$

と省略する.

- 例

$$k=2, \quad \hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2\hat{A}=\begin{pmatrix}2\times 1 & 2\times 2\\ 2\times 3 & 2\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix} \tag{68}$$

5. 行列の積

   二つの行列 A, B の積 AB は行列 A の列数と行列 B の行数が同じものに対してのみ定義される.
   $l\times m$ 行列 $\hat{A}=(a_{ij})$, $m\times n$ 行列 $\hat{B}=(b_{ij})$ に対して,

$$\hat{A}\hat{B}=(a_{ij})(b_{jk})=(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}) \quad \forall i,\ k. \tag{69}$$

   積 AB の行数は必ず行列 A の行数, 列数は行列 B の列数となる.
   B の列数が 1 の場合は積 AB は行列と列ベクトルの積であり, 結果的に答えの列数は 1 となる. 従って行列と列ベクトルの積は列ベクトルになる.

- 例

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, \quad \hat{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A}\hat{B}=\begin{pmatrix}1\times 1+2\times 1 & 1\times 0+2\times 1\\ 3\times 1+4\times 1 & 3\times 0+4\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 7 & 4\end{pmatrix} \tag{70}$$

- 例

$$\hat{B}\hat{A}=\begin{pmatrix}1\times 1+0\times 3 & 1\times 2+0\times 4\\ 1\times 1+1\times 3 & 1\times 2+1\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix} \tag{71}$$

6. 零行列 $\hat{O}$ $m\times n$ 行列 $\hat{O}=(o_{ij})$ が次の形を持つとき零行列とよぶ.

$$o_{ij}=0 \quad \forall i, \quad j \tag{72}$$

   そして $l\times m$ 行列 $\hat{A}$ と $n\times k$ 行列 $\hat{B}$ に対して次の性質を満たす.

$$\hat{A}\hat{O}=\hat{O}' \tag{73}$$

$$\hat{O}\hat{B}=\hat{O}'' \tag{74}$$

   ただし $\hat{O}'$ は $l\times n$ 行列の零行列, $\hat{O}''$ は $m\times k$ 行列の零行列である.

7. n 次正方行列

   $\hat{A}$ が $n\times n$ 行列 $\Rightarrow$ $\hat{A}$ は n 次正方行列

8. 行列の可換
   n 次正方行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \tag{75}$$

   - 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{は可換}$$

$$\text{実際,} \quad \hat{A}\hat{B} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 0\times 0 & 1\times 0 + 0\times 1 \\ 0\times 2 + 2\times 0 & 0\times 0 + 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 0\times 0 & 2\times 0 + 0\times 2 \\ 0\times 1 + 1\times 0 & 0\times 0 + 1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{76}$$

9. n 次単位行列 $\hat{I}_n$
   n 次正方行列 $\hat{I}_n$ が次の形を持つとき n 次単位行列とよぶ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{77}$$

   そして n 次正方行列 $\hat{A}$ に対して次の性質を満たす.

$$\hat{A}\hat{I}_n = \hat{I}_n\hat{A} = \hat{A} \tag{78}$$

   - 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{に対して}$$

$$\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & 1\times 0 + 2\times 1 \\ 3\times 1 + 4\times 0 & 3\times 0 + 4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

$$\hat{I}_2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 3 & 1\times 2 + 0\times 4 \\ 0\times 1 + 1\times 3 & 0\times 2 + 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{79}$$

10. 行列の冪乗 $\hat{A}^k$ 行列の冪乗は行列の積の定義から正方行列にのみ定義される. ある n 次正方行列 $\hat{A}$ の k 回の積

$$\hat{A}^k = \overbrace{\hat{A}\cdot\hat{A}\cdot\hat{A}\cdots\hat{A}}^{k} \tag{80}$$

- 例

$$
\begin{aligned}
\hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{に対して} \\
\hat{A}^3 &= \left(\hat{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^3 \\
&= \hat{I}_2^3 + 3\hat{I}_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3I_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \\
&= \hat{I}_2 + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{81}
$$

11. 転置行列
    $m{\times}n$ 行列 $\hat{A} = (a_{ij})$ に対して転置行列 ${}^t\hat{A} = ({}^ta_{ij})$,

$$
{}^t\hat{A} = ({}^ta_{ij}) = (a_{ji}) \tag{82}
$$

- 例

$$
\begin{aligned}
\hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & 5 & \boxed{6} \\ \boxed{7} & \boxed{8} & 9 \\ \boxed{10} & \boxed{11} & \boxed{12} \end{pmatrix}, \text{に対して} \\
{}^t\hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & \boxed{4} & \boxed{7} & \boxed{10} \\ \boxed{2} & 5 & \boxed{8} & \boxed{11} \\ \boxed{3} & \boxed{6} & 9 & \boxed{12} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{83}
$$

12. 対称行列 $\hat{T}$
    n 次正方行列 $\hat{T}$ が以下を満たす.

$$
{}^t\hat{T} = \hat{T} \tag{84}
$$

- 例

$$
\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & 4 & \boxed{5} \\ \boxed{3} & \boxed{5} & 6 \end{pmatrix} \tag{85}
$$

13. 交代行列 $\hat{A}$
    n 次正方行列 $\hat{A}$ が以下を満たす.

$$
{}^t\hat{A} = -\hat{A} \tag{86}
$$

- 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\boxed{1} & -\boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & -\boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow {}^t\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{2} \\ -\boxed{1} & 0 & \boxed{3} \\ -\boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} 0 & -\boxed{1} & -\boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & -\boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \end{pmatrix} = -\hat{A} \tag{87}$$

14. 対角行列 $\hat{D}$=(d_{ij})

 n 次正方行列 $\hat{D}$ に対して,

 のとき $\hat{D}$ を対角行列と呼ぶ.

$$\begin{cases} d_{ij} = d_i & i = j \\ d_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases} \tag{88}$$

- 例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \tag{89}$$

- 対角行列ではない例

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & -\boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} \tag{90}$$