

演習 6 演習: 行列の演算と行列式 3

1. 次の行列 \hat{A} と \hat{B} の和と積を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 以下の行列の逆行列を答えよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列の行列式の値を答えよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 行列式の値が 42 で 3 行 1 列成分が 0 ではない行列を与えよ.

5. 次の行列 \hat{A} , \hat{B} と \hat{C}

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

に対し, 次の式を計算せよ

$$\hat{B}^{-1} \left[{}^t (\hat{A}^{-1} \hat{C} {}^t \hat{B}) \right] {}^t \hat{A}$$

6. 次の行列 \hat{A} , \hat{B} と \hat{C}

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

に対し, 次の行列式を計算せよ

$$\left| \hat{B}^{-1} \right| \left| {}^t (\hat{A}^{-1} \hat{C} {}^t \hat{B}) \right| \left| \hat{A} \right|$$

7. 次の行列 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$,

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする. これらに対して, 以下の行列のペアは可換か答えよ.

(a)

$$\hat{\sigma}_x, \quad \hat{\sigma}_z$$

(b)

$$\hat{\sigma}_y, \quad \hat{\sigma}_z$$

これらの行列は Pauli 行列と呼ばれ, 量子ビット素子を表すのに用いられる.

8. 先の問題の行列 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ に対して, 次を満たす行列 \hat{P}_a, \hat{P}_b をそれぞれ答えよ. そして, それぞれを $\hat{\sigma}_z$ を用いて表せ.

(a)

$$\hat{P}_a \sigma_x = \sigma_y$$

(b)

$$\hat{P}_b \sigma_y = -\sigma_x$$

\hat{P} は二つの行のスカラー倍の積で書ける.

9. 先の問題の行列 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ に対して, 以下の演算を計算し, $\hat{I}_2, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ を用いて表せ.

(a)

$$\hat{\sigma}_y^2$$

(b)

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z$$

(c)

$$(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y)(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y).$$

10. 以下の回転行列

$$\hat{R}(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と列ベクトル

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考えたとき次の列ベクトル \mathbf{a} を $a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y$ の形に表せ.

- (a) $\mathbf{a} = \hat{R}(\pi)\hat{R}(-\pi/2)\mathbf{e}_x$
- (b) $\mathbf{a} = \hat{R}(\pi/2)\hat{R}(\pi/2)(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$
- (c) またこのとき次の θ を計算せよ.

$$\hat{R}(\theta) = \hat{R}(\pi/2)\hat{R}(\pi/2)$$

- (d) $-i\sigma_z(\sigma_x + \sigma_y)$ を計算し, $\hat{R}(\pi/2)$ との関係を述べよ.

(c) ヒント 加法定理 $\cos(\psi + \phi) = \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi$ と $\sin(\psi + \phi) = \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \phi$ を用いる.