演習 5　演習: 行列の演算と行列式 2

1. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の和を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. 次の行列の積を計算せよ.

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

※ $\hat{A}$ は Walsh-Hadamard 変換の例で情報の符号化に用いられる.

3. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

に対して次の式を満たす

$$\hat{P}\hat{A} = \hat{B}$$

行列 $\hat{P}$ を答えよ.
※ヒント: $\hat{P}$ は二つの行基本変形の積で表すことができる.

4. 次の行列 $\hat{A}$ の逆行列を計算せよ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

に対して

$$\hat{A}\left(\hat{B}\hat{A}\right)^{-1}$$

を計算せよ. ※ヒント: 逆行列の性質を用いよ.

6. 次の行列 $\hat{A}$ の行列式を計算せよ

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

7. 行列式の値が 27 の 3 次行列を与えよ

8. 次の行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

に対して

$$|\hat{A}| \left| \left(\hat{B}\hat{A}\right)^{-1} \right|$$

を計算せよ.
※ヒント: 行列の積の行列式, 逆行列の行列式の性質を利用せよ.

9. 次の行列 $\hat{A}$ の 2 行目の余因子展開を書き下せ.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

10. 次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$ を考える.

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y.$$

ただし,

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{221}$$

$\boldsymbol{a}$ に次の回転行列 $\hat{R}(\theta)$

$$\hat{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

に対して,

(a) $\hat{R}(\frac{\pi}{2})$ をかけたときの列ベクトル $\boldsymbol{a}'$ を答え , $\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ を用いて表せ.

(b) $\hat{R}(\frac{\pi}{4})$ をかけたときの列ベクトル $\boldsymbol{a}''$ を答え , $\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ を用いて表せ.

(c) 三つの列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{a}''$ のそれぞれに対して, $\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ の係数を二次元平面上に図示せよ.