線形代数 I (担当 松下勝義)

V. 行列式の定義と性質

教科書 §4.1-4.3, pp.47–59

講義ノート

- 連立一次方程式の解の公式
  連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{347}$$

の解が, $\hat{A}$ が正則であれば,

$$\hat{x} = \hat{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{348}$$

と表されることを述べた. つまり逆行列の公式があれば解の公式を与える事ができる. 実は, n 次正則行列 $\hat{A}$ の行列式 $|\hat{A}|$ と余因子行列 $\hat{\tilde{A}}$ を用いて

$$\hat{\tilde{A}}\hat{A} = |\hat{A}|\hat{I}_n \tag{349}$$

と書ける (定理 4.13) ある数である. また余因子行列も $\hat{A}$ の部分の行列式から作れる行列である.

行列式は行列でもベクトルでもないただの数である. もし, 行列式が 0 出なければ, 逆行列は

$$\hat{A}^{-1} = \frac{\hat{\tilde{A}}}{|\hat{A}|} \tag{350}$$

と書ける. 従って解の公式は

$$\boldsymbol{x} = \frac{\hat{\tilde{A}}}{|\hat{A}|}\boldsymbol{b} \tag{351}$$

で与えられる.

一方でもし行列式

$$|\hat{A}| = 0 \tag{352}$$

ならば逆行列が存在せず解の存在は保証されない.

このことからわかるのは係数行列の行列式 $|\hat{A}| \neq 0$ ならば連立一次方程式に解が存在し, その解は行列式で書ける.

行列式

連立一次方程式 $\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在する

$\Updownarrow$

係数行列 $\hat{A}$ が正則

$\Updownarrow$

行列式 $|\hat{A}| \neq 0$.

- 行列式の応用
  行列式は使いこなせないと授業についていけません.
  - ベクトルの一次独立性の判定 (後期の線形代数の授業)
  - 積分の変数変換のヤコビアン (解析学の授業)
  - 定係数微分方程式の解のロンスキアンによる表示 (微分方程式の授業)
  - 複数のベクトルが表す図形の体積の計算 (この授業でふれるかも).
- 行列式の定義

行列式の定義

n 次正方行列 $\hat{A}$ の行列式 $|\hat{A}|$ を以下で定義する.

$$|\hat{A}| = \sum_{\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}} \mathrm{sgn}\,(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\, a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n} \tag{353}$$

ここで $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ は順列であり, 和はすべての順列に対してとる. また $\mathrm{sgn}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ は順列の符号である.

- 行列式の例
  - 二次元行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{354}$$

の行列式 $|\hat{A}|$ を次で定義する.

$$|\hat{A}| = \sum_{(\sigma_1\ \sigma_2)} \mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2} \tag{355}$$

$$= \mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21} \tag{356}$$

ここで, $\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)$ は順列 $(\sigma_1\ \sigma_2)$ の符号である.

$*$ 順列

順列

順列 $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ は 1 から n までの整数を並べ替えたものである.

順列の例として n=2 の場合を考える. この場合 (1 2) や (2 1) がその $n=2$ の順列である. それぞれ,

· (1 2) では $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$.

· (2 1) では $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$.

$*$ 順列の符号

順列の符号

順列 $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ は
1 から n の中の互いに異なる整数の全てのペア i, j に対して,

$i < j$ のときに $\sigma_i > \sigma_j$ となっているペアの数＝転移数

とするとき

$$\begin{cases} \text{転位数} = \text{偶数} & 1 \\ \text{転位数} = \text{奇数} & \text{-1} \end{cases} \tag{357}$$

で定義する.

順列 $(\sigma_1\ \sigma_2)$ に対して符号 $\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2)$ は i ¡ j のときに $\sigma_i > \sigma_j$ となっている i と j のペアの数 (転位数) が偶数の時

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) = 1 \tag{358}$$

ペアの数 (転位数) が奇数の時

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2) = -1 \tag{359}$$

とする.

$*$ 式 (356) の中にある順列.

· (1 2) の符号
$i=1<j=2$ ならば $\sigma_1=1<\sigma_2=2$ であり, 転位数は 0 で偶数である. 従って, 順列 (1 2) の符号 sgn(1 2) は

$$\mathrm{sgn}(1\ 2)=1 \tag{360}$$

· (2 1) の符号
一方で, 順列 (2 1) は $i=1<j=2$ ならば $\sigma_1=2>\sigma_2=1$ であり, 転位数は 1 で奇数である. 従って, 順列 (2 1) の符号 sgn(2 1) は

$$\mathrm{sgn}(2,1)=-1 \tag{361}$$

∗ 式 (356) は上記の順列の符号を使うと

$$|A|=\mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22}+\mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21} \tag{362}$$
$$=1\times a_{11}a_{22}+(-1)\times a_{12}a_{21} \tag{363}$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{364}$$

∗ 具体的な行列式の値

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix} \tag{365}$$

の行列式は

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=\mathrm{sgn}(1\ 2)\times 2\times 4+\mathrm{sgn}(2\ 1)\times 3\times 1 \tag{366}$$
$$=1\times 2\times 4+(-1)\times 3\times 1 \tag{367}$$
$$=5 \tag{368}$$

– 三次元二次元と同様に定義する. 3 次元正方行列 $\hat{A}$

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \tag{369}$$

の行列式は

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (370) \\
&= \sum_{(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3)} \mathrm{sgn}(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3) a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} a_{3\sigma_3} \\
&= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) a_{11} a_{22} a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2) a_{11} a_{23} a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1) a_{12} a_{23} a_{31} \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3) a_{12} a_{21} a_{33} \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2) a_{13} a_{21} a_{32} \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1) a_{13} a_{22} a_{31} \qquad (371)
\end{aligned}
$$

∗ 三次元での順列の符号

- (1 2 3)
  明白は転位数は 0. 従って $\mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$.
- (1 3 2)
  $i = 2 < j = 3$ で $\sigma_2 = 3 > \sigma_1 = 2$ より転位数は 1. 従って $\mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) = 1$.
- 他の順列も同様に転位数から符号が定まる.

∗ 式 (371)

$$
\begin{aligned}
|\hat{A}| = &\operatorname{sgn}(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33} \\
&+ \operatorname{sgn}(1\ 3\ 2)a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ \operatorname{sgn}(2\ 3\ 1)a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ \operatorname{sgn}(2\ 1\ 3)a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ \operatorname{sgn}(3\ 1\ 2)a_{13}a_{21}a_{32} \\
&+ \operatorname{sgn}(3\ 2\ 1)a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= 1 \times a_{11}a_{22}a_{33} \\
&+ (-1) \times a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ 1 \times a_{12}a_{23}a_{31} \\
&+ (-1) \times a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ 1 \times a_{13}a_{21}a_{32} \\
&+ (-1)\times)a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
&+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

∗ 具体的な行列式行列

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{372}
$$

の行列式は

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2\ 3) \times 1 \times 1 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}(1\ 3\ 2) \times 1 \times 0 \times 0 \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 3\ 1) \times 2 \times 0 \times 1 \\
&+ \mathrm{sgn}(2\ 1\ 3) \times 2 \times -2 \times 2 \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 1\ 2) \times -1 \times -2 \times 0 \\
&+ \mathrm{sgn}(3\ 2\ 1) \times -1 \times 1 \times 1 \\
&= 1 \times 1 \times 1 \times 2 \\
&+ (-1) \times 1 \times 0 \times 0 \\
&+ 1 \times 2 \times 0 \times 1 \\
&+ (-1) \times 2 \times -2 \times 2 \\
&+ 1 \times -1 \times -2 \times 0 \\
&+ (-1) \times -1 \times 1 \times 1 \\
&= 2 - 0 + 0 - (-8) + 0 - (-1) \\
&= 11
\end{aligned}
$$

- 行列式の二つの性質
  - 行列式の多重線形性
    証明はしないが行列の次元によらず次が成立する.

行列式の多重線形性

行列式はそのある行 i の行ベクトルを二つに分けた行列式の和と一致する.

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ka_{i1}+lb_{i1} & ka_{i2}+lb_{i2} & \dots & ka_{in}+lb_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots b_{in} & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{373}$$

* 二次元の場合

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} ka_{11}+lb_{11} & ka_{12}+lb_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(1\ 2)(ka_{11}+lb_{11})a_{22} \\ &\quad + \mathrm{sgn}(2\ 1)(ka_{12}+lb_{12})a_{21} \quad (374) \\ &= k\,(\mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22}+\mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21}) \\ &\quad + l\,(\mathrm{sgn}(1\ 2)b_{11}a_{22}+\mathrm{sgn}(2\ 1)b_{12}a_{21}) \quad (375) \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (376)\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21}+lb_{21} & ka_{22}+lb_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \tag{377}$$

* 二次元の例

$$\begin{vmatrix} 2\times1+3\times2 & 2\times2+3\times1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \tag{378}$$

一方で,

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1 + (-1) \times (2)) + 3(-2 + (-1) \times 1) \tag{379}$$

$$= -6 + (-9) \tag{380}$$

$$= -15 \tag{381}$$

より成立している.

$*$ 三次元の場合

$$\begin{vmatrix} ka_{11} + lb_{11} & ka_{12} + lb_{12} & ka_{13} + lb_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{382}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} + lb_{21} & ka_{22} + lb_{22} & ka_{23} + lb_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{383}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} + lb_{31} & ka_{32} + lb_{32} & ka_{33} + lb_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \tag{384}$$

$*$ 多重線形性からわかるように, $|\hat{A} + \hat{B}| \neq |\hat{A}| + |\hat{B}|$

– 行列式の行の入れ替え

行列式の行の入れ替え

行列式の二つの行を入れ替えると符号が変わる.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{385}
$$

∗ 二次元の場合

$$\mathrm{sgn}(1\ 2) = -\mathrm{sgn}(1\ 2) \tag{386}$$

に注意すると,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(1\ 2)a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}(2\ 1)a_{12}a_{21} \tag{387}$$

$$= -\mathrm{sgn}(2\ 1)a_{11}a_{22} - \mathrm{sgn}(1\ 2)a_{12}a_{21} \tag{388}$$

$$= -\mathrm{sgn}(1\ 2)a_{21}a_{12} - \mathrm{sgn}(2\ 1)a_{22}a_{11} \tag{389}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \tag{390}$$

∗ 二次元の場合の例

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times -1 + (-1) \times 1 \times 1 \qquad = -3 \tag{391}$$

一方で,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times -1 \times 2 \qquad = 3 \tag{392}$$

で符号が変わっている事がわかる.

* 三次元以上でも同様